Dvojný integrál

Oprava chyby, kterou jsem udělala v následujícím příkladu:

$D = \{[x,y] \in R^2 : x \in <1,3>, y \in <1,3>\}$

$$\iint\limits_D \frac{x}{(xy+1)^2}\,dxdy = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_1^3 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy \right) dx = \int\limits_1^3 x \left(\int\limits_1^3 \frac{1}{(xy+1)^2}\,dy \right) dx =$$

Vnitřní integrál (x je teď konstanta):

$$\int\limits_1^3 \frac{1}{(xy+1)^2}\,dy \left| \begin{array}{c} t = xy+1 \\ dt = x\,dy \\ y=1 \to t = x+1 \\ y=3 \to t=3x+1 \end{array} \right| = \int\limits_{x+1}^{3x+1} \frac{1}{t^2}\frac{1}{x}\,dt = \frac{1}{x}\left[-\frac{1}{t}\right]_{x+1}^{3x+1} \neq \frac{-3x-1+x+1}{x} = -2$$

– vidíme hned, že někde je chyba: nemůže vyjít záporné číslo jako integrál z kladné funkce. Místo červeně vyznačeného chybného výpočtu má být

$$\frac{1}{x}\left[-\frac{1}{t}\right]_{x+1}^{3x+1} = \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{3x+1} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{-x-1+3x+1}{(3x+1)(x+1)} = \frac{2}{(3x+1)(x+1)} > 0 \text{ pro } x > 0.$$

Po dosazení do vnějšího integrálu (pokračování modrého rovnítka) dostaneme integrál jedné proměnné – umíme z minulého semestru:

$$= \int\limits_1^3 \frac{2x}{(3x+1)(x+1)}\,dx = \ldots$$

Existence integrálu

• Zdůvodněte, na kterých množinách D daných podm. a) až d) existuje Riem. integrál

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy\ .$$

a) $x^2 + y^2 \leq 1$
b) $(x-6)^2 + y^2 \leq 1$
c) $(x-1)^2 + y^2 < 1$
d) $(x-6)^2 + y \leq 1$

⋆ Řešení:

a) Neexistuje, protože funkce na D není omezená (pozor: nevadí, že není definovaná v jednom bodě uvnitř D – na množině míry nula nemusí být definovaná).
b) Existuje, protože funkce je spojitá na uzavřené množině D (a tedy omezená).
c) Neexistuje, protože funkce není omezená na D (i když je tam spojitá).
d) Neexistuje, protože D není omezená.

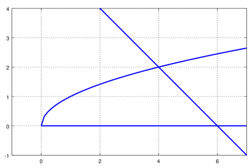
Výpočet integrálu pomocí Fubiniovy věty

Před použitím Fubiniovy věty musíme

- zapsat množinu D, přes kterou integrujeme, jako jednoduchý obor integrace,
- ověřit, že integrovaná funkce je spojitá na D

Příklad 1

Množina D je omezena křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$: Vypočítejte dvojný integrál $f(x,y) = xy$ pomocí Fub. věty, oběma způsoby.



Vzhledem k y musíme nejdřív vyjádřit křivky jako funkce y:
$x = y^2$, $x = 6 - y$, třetí rovnice stanoví dolní mez pro y.
$D : 0 \le y \le 2, \quad y^2 \le x \le 6 - y$.

$$\iint_D xy\,dx\,dy =^{FV} \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{6-y} xy\;dx \right) dy = \int_0^2 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{6-y} dy = \int_0^2 y\left((6-y)^2 - y^4\right) dy = \cdots = \frac{50}{4}$$

Vzhledem k x musíme D rozdělit na 2 části: $D = D_1 \cup D_2$, kde
$D_1 : 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}, \qquad D_2 : 4 \le x \le 6, \quad 0 \le y \le 6 - x$.

$$\iint_D xy\,dx\,dy =^{FV} \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} xy\;dy \right) dx + \int_4^6 \left(\int_0^{6-x} xy\;dy \right) dx =$$

$$= \int_0^4 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} dx + \int_4^6 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{6-x} dx = \int_0^4 x\,\frac{x}{2}\,dx + \int_4^6 x\,\frac{(6-x)^2}{2}\,dx = \cdots = \frac{50}{4}$$

Příklad 2

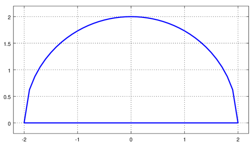
$D = \{[x,y] \in R^2 : x \in < -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} >, y \in < 0, \frac{\pi}{4} >\}$

$$\iint\limits_D \cos(x+y)\, dx\, dy \;=^{FV} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+y)\ dy \right) dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(x+y)]_{y=0}^{\frac{\pi}{4}}\ dx =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+\frac{\pi}{4}) - \sin x\ dx = [-\cos(x+\frac{\pi}{4}) + \cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = ... = 1$$

Příklad 3

Spočítejte obsah půlkružnice K dané nerovnostmi $x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0$
pomocí dvojného integrálu, nejdřív bez použití polárních souřadnic a pak s nimi.



Půlkružnici K vyjádříme jako jednoduchý obor integrace buď vzhledem k ose x jako
$D: -2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.
nebo vzhledem k ose y jako
$D: 0 \le y \le 2, \quad -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}$.
Obsah množiny K se spočítá jako dvojný integrál přes K z jedničky, zvolme třeba obor integrace vzhledem k y:

$$S = \iint\limits_K 1\, dx\, dy \;=^{FV} \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1\ dx \right) dy = \int\limits_0^2 \left(2 \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} 1\ dx \right) dy = \int\limits_0^2 2\sqrt{4-y^2}\ dy$$

a pomocí substituce $y = 2\sin t$ dostaneme

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\ dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{4\cos^2 t}\ \cos t\ dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 8\ \cos^2 t\ dt = \cdots = 2\,\pi.$$

Polární souřadnice

– zjednoduší integrál, když f nebo D obsahuje $x^2 + y^2 = r^2$

Předchozí příklad pomocí polárních souřadnic:

$\widetilde{K}$: $0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$

$$S = \iint\limits_K 1\,dx\,dy \left| \begin{array}{c} x = r\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\varphi \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \iint\limits_{\widetilde{K}} r\,dr\,d\varphi \;=^{FV} \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^\pi r\ d\varphi \right) dr =$$

což můžeme vyjádřit jako součin integrálů, neboť **meze jsou konstantní**:

$$= \int\limits_0^2 r\ dr \cdot \int\limits_0^\pi 1\ d\varphi = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \cdot \pi = 2\,\pi.$$

Příklad 4

Určete objem tělesa M ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 1$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ a podmínkou $z \ge 0$.

Řešení: těleso představuje válec s podstavou $z = 0$, seříznutý nahoře kulovou plochou (nakreslete si obrázek). Objem spočítáme jako dvojný integrál funkce $f(x,y) \equiv z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, jejíž graf představuje tuto kulovou plochu, přes podstavu válce $M_{xy} = \{[x,y] : x^2 + y^2 \le 1\}$. $\widetilde{M}_{xy}:\ 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$V = \iint\limits_{M_{xy}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\ dx\ dy \left| \begin{array}{c} x = r\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\varphi \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \iint\limits_{\widetilde{M}_{xy}} \sqrt{9 - r^2}\ \ r\ dr\ d\varphi \;=^{FV}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^1 r\ \sqrt{9 - r^2}\ dr \right) d\varphi = -2\pi \int\limits_9^8 \frac{\sqrt{t}}{2}\ dt = \pi \cdot \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_8^9 = \frac{2}{3}\pi((\sqrt{9})^3 - (\sqrt{8})^3) = \frac{2}{3}\pi(27 - 16\sqrt{2})$$

– použili jsme substituci $t = 9 - r^2$.

Zobecněné polární souřadnice

$x = x_0 + a\,r\,\cos\varphi$

$y = y_0 + b\,r\,\sin\varphi$

$dxdy \to a\,b\,r\,drd\varphi$

Příklad 5

Určete statický moment vzhledem k ose y desky D omezené křivkou $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$, je-li plošná hustota $\rho(x, y) = 1$.

Řešení: po doplnění na čtverce zjistíme, že D má tvar elipsy $\frac{(x-1)^2}{4} + (y - 2) \leq 0$, zvolíme tedy zobecněné polární souřadnice:
$\widetilde{D}: \ x = 1 + 2r \cos\varphi, \ \ y = 2 + r \sin\varphi, \ \ r \in < 0, 1 >, \ \varphi \in < 0, 2\pi >$

$$m_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\; dx\; dy \left| \begin{array}{c} x = 1 + 2r\,\cos\varphi \\ y = 2 + r\,\sin\varphi \\ dx\,dy \to 2r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \iint_{\widetilde{D}} (1 + 2r\,\cos\varphi)\; 2r\; dr\; d\varphi \;=^{FV}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2r\; (1 + 2r\,\cos\varphi)\; dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[r^2 + 4\,\frac{r^3}{3}\,\cos\varphi \right]_{r=0}^{1} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 + \frac{4}{3}\,\cos\varphi\; d\varphi = \left[\varphi + \frac{4}{3}\,\sin\varphi \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Poznámka:
Není vždy nutné používat polární souřadnice, kdykoliv se někde objeví člen $x^2 + y^2$.

Příklad 6

$M: \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \quad f(x, y) = xy$
Bez polárních souřadnic: $M: \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

$$\iint_M xy\; dx\,dy \;=^{FV} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy\; dy\,dx = \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{2}\,(8 - 4) = 2$$

S polárními souřadnicemi: $\widetilde{M}: \ 0 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\iint_M xy\; dx\,dy \left| \begin{array}{c} x = r\,\cos\varphi \\ y = r\,\sin\varphi \\ dx\,dy \to r\,dr\,d\varphi \end{array} \right| = \iint_{\widetilde{M}} (r\,\cos\varphi) \cdot (r\,\sin\varphi)\; r\; dr\; d\varphi \;=^{FV}$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\,\cos\varphi\,\sin\varphi\; d\varphi\; dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\,\varphi)\; d\varphi \int_0^2 r^3\; dr =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\,\cos(2\,\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{4}\,(-\cos\pi + \cos 0) \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = 2$$