Greenova věta (skripta III.5)

Předpokládáme, že

- $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ je definovaná v oblasti $\Omega \subset R^2$ a má
  - spojité parciální derivace v Ω
- $\mathcal{C}$ je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká křivka, navíc:
  - $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná
  - $\mathcal{C} \subset \Omega$, $int\ \mathcal{C} \subset \Omega$

Potom platí vztah mezi cirkulací a plošným integrálem:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy\ .$$

Je-li křivka orientovaná záporně, pak buď na levé, nebo na pravé straně rovnice musíme před integrál napsat minus.

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě

Definice: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f}$ nezávisí v oblasti Ω na cestě (v R^2 i v R^3), pokud pro libovolné dvě jednoduché, p.č. hladké křivky $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$, které mají stejný počáteční bod A a stejný koncový bod B, platí (skripta V.1.1)

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{f}\, d\vec{s}.$$

Věta: Křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f}$ nezávisí v oblasti Ω na cestě, **právě když** cirkulace $\vec{f}$ po libovolné jednoduché, p.č. hladké, uzavřené křivce v Ω je nulová. (V.1.2)

Důsledky Greenovy věty pro nezávislost integrálu na cestě v R^2

Předp. $\vec{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ má **spojité parciální derivace** v oblasti $\Omega \subset R^2$. Pak platí:

- Integrál $\vec{f}$ nezávisí na cestě v $\Omega \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ v Ω ... **nutná podmínka** (V.2.1)
- **postačující podmínky** (V.2.6):

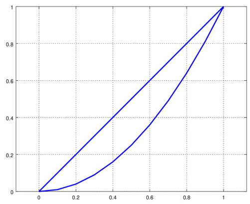
  Ω je jednoduše souvislá a $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ v $\Omega \quad \Rightarrow \quad$ Integrál $\vec{f}$ nezávisí na cestě v Ω

  Oblast $\Omega \subset R^2$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou jednoduchou, p.č. hladkou, uzavřenou křivku $\mathcal{C}$ v Ω platí, že $int\ \mathcal{C} \subset \Omega$.

Příklad 10.1

Použijeme Greenovu větu k výpočtu cirkulace v **Př. 9.9** z minulého týdne:

Určete cirkulaci $\vec{f} = ((x+y)^2, -(x-y)^2)$ podél křivky $\mathcal{C}$, která je určena jako hranice množiny $M = \{[x,y] \in R^2 : \ x \in < 0, 1 >, \ x^2 \leq y \leq x\}$ a je orientována v záporném směru (= ve směru hodinových ručiček).



Řešení:

Před použitím Greenovy věty musíme nejdřív ověřit její předpoklady:

$$\vec{f} = (\underbrace{(x+y)^2}_{f_1}, \underbrace{-(x-y)^2}_{f_2}), \quad \mathcal{D}(\vec{f}) = R^2,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2(x+y), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2(x+y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2(x-y), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2(x-y)$$

– všechny parciální derivace jsou spojité v R^2,
– R^2 je oblast (tj. otevřená souvislá množina).

$\mathcal{C}$ je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká křivka v R^2.

$\Rightarrow$ lze použít Greenovu větu

$\mathcal{C}$ je orientovaná záporně, $int\ \mathcal{C} = int\ M = \{[x,y] \in R^2 : \ x \in (0,1), \ x^2 < y < x\}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \boxed{-} \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = -\iint_M -2(x-y) - 2(x+y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_M 2x - 2y + 2x + 2y\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 4x\ dy\ dx = \int_0^1 4x\,(x - x^2)\ dx =$$

$$= \int_0^1 4x^2 - 4x^3\ dx = \left[4\frac{x^3}{3} - x^4\right]_0^1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Příklad 10.2

Určete cirkulaci $\vec{f} = (xy, 2x-y)$ podél křivky $\mathcal{C}$, která je kladně orientovaným obvodem trojúhelníka ABC, kde A=[0,0], B=[2,0], C= [2,1].

Řešení:

Po ověření předpokladů Greenovy věty (jako v předchozím příkladu) ji použijeme.
$int\ \mathcal{C} = \{[x,y] \in R^2 :\ x \in (0,2),\ 0 < y < \frac{x}{2}\}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_{int\ \mathcal{C}} 2 - x\ dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} 2 - x\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^2 (2-x)\,\frac{x}{2}\ dx = \int_0^2 x - \frac{x^2}{2}\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Příklad 10.3

Určete cirkulaci $\vec{f} = (\operatorname{arctg} y, \frac{y^2 x}{1+y^2})$ podél křivky $\mathcal{C}$, která je kladně orientovaným obvodem čtverce [0,0], [1,0], [1,1], [0,1].

Řešení:

Ověření předpokladů Greenovy věty: $f_1 = \operatorname{arctg} y,\ f_2 = \frac{y^2 x}{1+y^2}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2}{1+y^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{2yx}{(1+y^2)^2}$$

– všechny parciální derivace jsou spojité v R^2,

$\mathcal{C}$ je jednoduchá, po částech hladká křivka v R^2.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{y^2}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2} dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^2+1-1-1}{1+y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 1 - \frac{2}{1+y^2} \int_0^1 1\ dx\ dy = \int_0^1 1 - \frac{2}{1+y^2}\ dy = \left[\, y - 2\operatorname{arctg} y\,\right]_0^1 = 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Příklad 10.4

Určete cirkulaci $\vec{f} = (1+y, 2x)$ podél uzavřené kladně orientované křivky
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, kde
$\mathcal{C}_1 : \ x = \sin y, \ y \in < 0, \pi >$
$\mathcal{C}_2 : \ x = 0, \ y \in < 0, \pi >$

Řešení:
Použijeme Greenovu větu ($\vec{f}$ má spojité parc. der. v R^2):
$int\ \mathcal{C} = \{[x,y] \in R^2 : \ y \in (0,\pi), \ 0 < x < \sin y\}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_{int\ \mathcal{C}} 2 - 1 dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin y} 1\ dx\ dy = \int_0^{\pi} \sin y\ dy =$$

$$= [-\cos y]_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

Příklad 10.5

Určete cirkulaci $\vec{f} = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ podél $\mathcal{C} : \ x^2 + y^2 = 4$, záporně orientované.

Řešení:
Integrál existuje, protože $\vec{f}$ je spojitá na $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ je jednoduchá hladká křivka.
K výpočtu ale nemůžeme použít Greenovu větu, protože $\vec{f}$ nemá spojité derivace v *int* $\mathcal{C}$ (v okolí počátku není omezená).

$\mathcal{C} : \ P(t) = [2\cos t, \ 2\sin t], \quad t \in < 0, 2\pi >$, parametrizace je nesouhlasná
$\dot{P}(t) = (-2\sin t, \ 2\cos t)$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \boxed{-} \int_0^{2\pi} \underbrace{(\frac{2\sin t}{4}, \ -\frac{2\cos t}{4})}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-2\sin t, \ 2\cos t)}_{\dot{P}(t)}\ dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t\, dt = 2\pi$$

Pozor: co by vyšlo, kdybychom bez ověřování použili Greenovu větu?

$$\iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = 0$$

tedy v tomto případě

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} \neq \iint_{int\ \mathcal{C}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

Příklad 10.6

Na jakých křivkách bychom mohli použít Greenovu větu pro pole

a) $\vec{f} = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ ... pole z minulého příkladu

b) $\vec{f} = (x, \frac{1}{4-x^2-2y^2})$

Řešení:

a) Vektorová funkce $\vec{f}$ má spojité parciální derivace na svém definičním oboru, který představuje oblast $\Omega = R^2 - [0,0]$.

G. V. tedy lze použít na každé uzavřené, jednoduché, po částech hladké křivce $\mathcal{C}$ takové, že $\mathcal{C} \subset \Omega$ a *int* $\mathcal{C} \subset \Omega$, tj. $[0,0] \notin \mathcal{C}$ a $[0,0] \notin$ *int* $\mathcal{C}$

b) Vektorová funkce $\vec{f}$ má spojité parciální derivace na svém definičním oboru
$\mathcal{D}(\vec{f}) = \{[x,y] \in R^2 : \; x^2 + 2y^2 \neq 4\}$.
To je otevřená množina, ale není souvislá, takže to není oblast: skládá se ze dvou oblastí
$\Omega_1 = \{[x,y] \in R^2 : \; x^2 + 2y^2 < 4\}$ (vnitřek elipsy) a
$\Omega_2 = \{[x,y] \in R^2 : \; x^2 + 2y^2 > 4\}$ (oblast vně elipsy).

G. V. tedy lze použít na každé uzavřené, jednoduché, po částech hladké hladké křivce $\mathcal{C}$, která buď leží celá uvnitř dané elipsy (tj. $\mathcal{C} \subset \Omega_1$ a tedy i *int* $\mathcal{C} \subset \Omega_1$), nebo celá leží vně té elipsy a ani její vnitřek tu elipsu neobsahuje (tj. $\mathcal{C} \subset \Omega_2$, *int* $\mathcal{C} \subset \Omega_2$).

Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě

Příklad 10.7

Určete cirkulaci $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ podél $\mathcal{C}: \ (x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 4$, záporně orientované.

Řešení:

Než se pustíme do počítání, zkusíme se nad příkladem zamyslet:

$$\vec{f} = (\underbrace{y^2}_{f_1}, \underbrace{2xy}_{f_2}), \quad \mathcal{D}(\vec{f}) = R^2,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x \ \text{ jsou spojité v } R^2, \ R^2 \text{ je jednoduše souv.}$$

– takže křivkový integrál $\vec{f}$ nezávisí v R^2 na cestě. Z toho plyne

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = 0 \,.$$

Příklad 10.8

Jaká je práce $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ (pole z minulého příkladu) podél $\mathcal{C}: \ y = \frac{\ln x}{\ln 3}, \ x \in < 1, 3 >$ orientované z A=[1,0] do B=[3,1] ?

Řešení:

V minulém příkladu jsme ukázali, že křivkový integrál $\vec{f}$ nezávisí v R^2 na cestě. Integrál tedy můžeme počítat po libovolné křivce, která má stejný počáteční a koncový bod jako zadaná křivka, nejjednodušší bude úsečka z A=[1,0] do B=[3,1]:

$\overrightarrow{AB}: \ X = A + (B - A)\,t, \ t \in < 0, 1 >$

$x = 1 + 2\,t$
$y = 0 + t$

$P(t) = [1 + 2\,t, \ t\,]$

$\dot{P}(t) = (2, \, 1)$

$$W = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^1 \underbrace{(t^2, \ 2\,t(1+2\,t))}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(2, \, 1)}_{\dot{P}(t)} \, dt = \int_0^1 2t^2 + 2t + 4t^2 \, dt =$$

$$= \int_0^1 6t^2 + 2t \, dt = [2t^3 + t^2]_0^1 = 2 + 1 = 3$$

Příklad 10.9

Které z následujících vektorových funkcí nezávisí v R^2 na cestě? Zdůvodněte.

a) $\vec{f} = (x^2 + 1, \sin y^3)$

b) $\vec{f} = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

c) $\vec{f} = (4y, 5x)$

Řešení:

Všechny tři vektorové funkce mají spojité parciální derivace v R^2, můžeme tedy použít Greenovu větu pro výpočet křivkového integrálu po libovolné uzavřené, jednoduché, po částech hladké křivce $\mathcal{C}$ (protože R^2 je jednoduše souvislý).

Stačí se tedy přesvědčit, zda se odpovídající derivace "křížem" navzájem rovnají:

a) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad$ int. nezávisí na cestě v R^2

b) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad$ int. nezávisí na cestě v R^2

c) $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 4, \quad \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 5 \quad \Rightarrow \quad$ int. závisí na cestě v R^2

Příklad 10.10

Popište co největší oblast, na které integrál z funkce $\vec{f} = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ (z **Př. 10.5**) nezávisí na cestě.

Řešení:

Všechny parciální derivace $\vec{f}$ jsou spojité v $\mathcal{D}(\vec{f}) = R^2 - [0, 0]$ a platí

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \ ,$$

takže na každé jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathcal{D}(\vec{f})$ nezávisí integrál z funkce $\vec{f}$ na cestě. Například Ω může být libovolný kvadrant (bez souřadných os), nebo třeba pravá polorovina R^2 (bez osy y).

Má-li být Ω co největší, vyjmeme z $\mathcal{D}(\vec{f})$ vhodnou množinu míry nula (aby však výsledná množina pořád zůstala souvislá): například libovolnou polopřímku začínající v počátku, nebo graf funkce $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Potřebujeme totiž zabránit každé uzavřené křivce, která celá leží v Ω, aby její vnitřek obsahoval počátek – tj. aby kolem počátku mohla oběhnout.