Potenciální pole

Definice (skripta V.1.3): Pole $\vec{f}$ se nazývá potenciální v oblasti Ω (v R^2 nebo v R^3), právě když existuje skalární funkce Ψ v Ω taková, že

$$\vec{f} \;=\; \nabla\Psi \quad \text{v}\,\Omega\;.$$

Funkce Ψ se nazývá potenciál $\vec{f}$ v Ω.

Věta (V.1.2, V.1.7)
Jestliže vektorové pole $\vec{f}$ je **spojité** v Ω , pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\vec{f}$ je potenciální v Ω
- křivkový integrál $\vec{f}$ nezávisí na cestě v Ω
- cirkulace $\vec{f}$ po libovolné uzav., jednoduché p.č. spoj. křivce v Ω je nulová

Věta (V.1.5)
Nechť pole $\vec{f}$ je potenciální a spojité v oblasti Ω, Ψ je potenciál $\vec{f}$ v Ω a $\mathcal{C} \subset \Omega$ je jednoduchá, p.č. hladká křivka z bodu A do bodu B. Potom

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s} = \Psi(B) - \Psi(A)\;.$$

Jak poznáme, že pole je potenciální? Obecně: najdeme potenciál.

Potenciální pole v R^2

Nechť pole $\vec{f} = (f_1, f_2)$ má **spojité parc. derivace** v oblasti $\Omega \subset R^2$.

Jak poznáme, že pole je potenciální v Ω?

$$\boxed{\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\ \text{v}\ \Omega} \xrightarrow{\text{ANO}} \boxed{\Omega \text{ jednoduše souvislá}} \xrightarrow{\text{ANO}} \vec{f}\ \textbf{je}\ \text{potenciální v}\ \Omega$$

$\downarrow$ NE — $\vec{f}$ **není** potenciální v Ω (z první podmínky)

$\downarrow$ NE — **nevíme** (z druhé podmínky)

Příklad 11.1

Dokažte, že $\Psi = x\,y\,\sin z$ je potenciál pole $\vec{f}(x,y,z) = (y\,\sin z, x\,\sin z, x\,y\,\cos z)$ v R^3.

Řešení:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = y\,\sin z, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x\,\sin z, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = x\,y\,\cos z.$$

Příklad 11.2

Dokažte, že $\Psi = x^2 + y^2$ je potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (2x,\, 2y)$ v R^2 a spočtěte $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s}$, kde $\mathcal{C}$ je část elipsy $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ z bodu A=[1,0] do bodu B=[0,3].

Řešení:

$$\nabla\Psi = (2x,\, 2y) = \vec{f}(x,y), \qquad \int_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s} = \int_A^B \vec{f}\,d\vec{s} = \Psi(B) - \Psi(A) = 9 - 1 = 8$$

Jak najdeme potenciál? – integrováním:

Příklad 11.3

Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (y^2,\, 2xy - 1)$ v R^2.

Řešení:

Nejdřív se přesvědčíme, zda potenciál vůbec existuje:
$\vec{f}$ má spoj. parc. derivace v R^2 a platí $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 2y = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}$ je potenciální v R^2.

Hledáme Ψ tak, že $\nabla\Psi = \vec{f} = (f_1, f_2)$, tj. $f_1 = \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$, $f_2 = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$,
takže $\Psi = \int f_1\,dx$ a zároveň $\Psi = \int f_2\,dy$:

$$\Psi = \int f_1\,dx = \int y^2\,dx = \boxed{xy^2} + c_1(y)$$

$$\Psi = \int f_2\,dy = \int 2xy - 1\,dy = \boxed{xy^2} - y + c_2(x)$$

$$\Psi = \boxed{xy^2} - y + c$$

nebo: $\quad \Psi = \int f_1\,dx = \int y^2\,dx = xy^2 + c(y), \qquad \Psi = xy^2 \underbrace{-y + c}_{c(y)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= f_2 \\ \underline{2xy} + c'(y) &= \underline{2xy} - 1 \\ c'(y) &= -1 \\ c(y) &= \int -1\,dy = -y + c \end{aligned}$$

Příklad 11.4 Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (2x+y,\, x+3)$ v R^2.

Řešení:

Nejdřív se přesvědčíme, zda potenciál existuje:
$\vec{f}$ má spoj. parc. derivace v R^2 a platí $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}$ je potenciální v R^2.

Hledáme Ψ tak, že $\nabla\Psi = \vec{f}$, tedy

$\Psi = \int f_1\,dx = \int 2x + y\,dx = x^2 + \boxed{yx} + c_1(y)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int x + 3\,dy = \boxed{xy} + 3y + c_2(x)$

$\Psi = \boxed{xy} + 3y + x^2 + c$

Příklad 11.5 Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (e^y + 1,\, xe^y)$.

Řešení:

$\Psi = \int f_1\,dx = \int e^y + 1\,dx = \boxed{xe^y} + x + c_1(y)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int xe^y\,dy = \boxed{xe^y} + c_2(x)$

$\Psi = \boxed{xe^y} + x + c \qquad$ v R^2.

Příklad 11.6 Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (x^2y,\, 5xy^2)$.

Řešení:

$\Psi = \int f_1\,dx = \int x^2y\,dx = \frac{x^3y}{3} + c_1(y)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int 5xy^2\,dy = 5\,\frac{y^3x}{3} + c_2(x)$

– nejde dohromady, protože $\vec{f}$ **není potenciální** (v žádné oblasti):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 5y^2 \neq x^2 = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

Příklad 11.7 Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y,z) = (y+z,\, x+z,\, y+x)$.

Řešení:

$\Psi = \int f_1\,dx = \int y + z\,dx = yx + zx + c_1(y,z)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int x + z\,dy = xy + zy + c_2(x,z)$

$\Psi = \int f_3\,dz = \int y + x\,dz = yz + xz + c_3(x,y)$

$\Psi = xy + yz + zx + c \qquad$ v R^3.

Příklad 11.8

Spočtěte $\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s}$, kde $\vec{f}(x,y) = (x^2,\ y^2)$ a $\mathcal{C}:\ y = \frac{x^2}{2},\ x \in < 0, 2 >$.

Řešení:

$\vec{f}$ je potenciální v R^2, protože $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ – najdeme tedy potenciál a pomocí něj spočítáme integrál z bodu $A = [0, y(0)] = [0, 0]$ do bodu $B = [2, y(2)] = [2, 2]$:

$\Psi = \int f_1\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c_1(y)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + c_2(x)$

$\Psi = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c \quad$ v R^2.

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s} = \int\limits_{A}^{B} \vec{f}\,d\vec{s} = \Psi(B) - \Psi(A) = \Psi([2,2]) - \Psi([0,0]) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3} - 0 - 0 = \frac{16}{3}$$

Příklad 11.9

Spočtěte $\int\limits_{\overrightarrow{AB}} \vec{f}\,d\vec{s}$, kde $\vec{f}(x,y) = (\frac{1}{x-y^2},\ -\frac{2y}{x-y^2})$, A=[1,-2], B=[3,3].

Řešení: v $\mathcal{D}(\vec{f}\,) = \{[x,y] \in R^2 : x - y^2 \neq 0\}$ má $\vec{f}$ spoj. parc. derivace a platí

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2y}{(x-y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

takže $\vec{f}$ je potenciální na každé jednoduše souvislé množině v $\mathcal{D}(\vec{f}\,)$. Největší jsou $\Omega_1 = \{[x,y] \in R^2 : x - y^2 > 0\}$ a $\Omega_2 = \{[x,y] \in R^2 : x - y^2 < 0\}$, platí $\mathcal{D}(\vec{f}\,) = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
Oba body A, B leží v Ω_2: A: $x - y^2 = 1 - 4 = -3 < 0$, B: $x - y^2 = 3 - 9 = -6 < 0$
$\Rightarrow$ lze použít potenciál:

$\Psi = \int f_1\,dx = \int \frac{1}{x-y^2}\,dx = \ln|x - y^2| + c_1(y)$

$\Psi = \int f_2\,dy = \int -\frac{2y}{x-y^2}\,dy = \ln|x - y^2| + c_2(x)$

$\Psi = \ln|x - y^2| + c \quad$ v Ω_2

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{f}\,d\vec{s} = \int\limits_{A}^{B} \vec{f}\,d\vec{s} = \Psi(B) - \Psi(A) = \ln|1-4| - \ln|3-9| = \ln 3 - \ln 6 = \ln\frac{3}{6} = \ln\frac{1}{2}$$

Příklad 11.10

Je pole $\vec{f} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$ potenciální v $\mathcal{D}(\vec{f}) = R^2 - [0,0]$?

Řešení:

Pole $\vec{f}$ má spoj. parc. derivace v $\mathcal{D}(\vec{f})$, platí

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

takže $\vec{f}$ je potenciální v každé jednoduše souvislé množině v $\mathcal{D}(\vec{f})$.
Nevíme, jestli je potenciální v celém $\mathcal{D}(\vec{f})$.

Pokračování příkladu:

Dokažte, že $\Psi = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ je potenciál $\vec{f}$ v celém $\mathcal{D}(\vec{f})$.

Řešení:

V celém $\mathcal{D}(\vec{f})$ je $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} = f_1$, podobně $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = f_2$, tedy $\nabla\Psi = \vec{f}$.

Příklad 11.11

Je pole $\vec{f} = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ potenciální v $\mathcal{D}(\vec{f}) = R^2 - [0,0]$?

Řešení:

Pole $\vec{f}$ má spoj. parc. derivace v $\mathcal{D}(\vec{f})$, platí

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

takže $\vec{f}$ je potenciální v každé jednoduše souvislé množině v $\mathcal{D}(\vec{f})$.
Nevíme, jestli je potenciální v celém $\mathcal{D}(\vec{f})$.

Ale můžeme zkusit integrál po uzavřené křivce kolem počátku,
třeba $\mathcal{C}: \; P(t) = [\cos t, \; \sin t], \quad t \in <0, 2\pi>$:
Integrál existuje, protože $\vec{f}$ je spojitá na $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ je jednoduchá hladká křivka.
K výpočtu ale nemůžeme použít Greenovu větu, protože $\vec{f}$ nemá spojité derivace v *int* $\mathcal{C}$.

$$\dot{P}(t) = (-\sin t, \; \cos t)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin t, \; -\cos t)}_{\vec{f}(P(t))} \cdot \underbrace{(-\sin t, \; \cos t)}_{\dot{P}(t)} \, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t \, dt = -2\pi$$

Takže $\vec{f}$ není potenciální v celém $\mathcal{D}(\vec{f})$, protože neplatí, že cirkulace podél $\mathcal{C}$ je nula.

Příklad 11.12

Najděte potenciál pole $\vec{f}(x,y) = (y\,e^{x^2}(1+2x^2),\ x\,e^{x^2})$ v R^2.

Řešení:

Nejdřív se přesvědčíme, zda potenciál existuje:
$\vec{f}$ má spoj. p. der. v R^2 a platí $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \quad \Rightarrow \vec{f}$ je potenciální v R^2.

$\Psi = \int f_1\,dx = \int y\,e^{x^2}(1+2x^2)\,dx = \,?$

– tomuto integrování bychom se raději vyhnuli, zkusíme tedy druhý postup:

$$\Psi = \int f_2\,dy = \int x\,e^{x^2}\,dy = y\,x\,e^{x^2} + \ c(x)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = f_1$$

$$\underline{y\,(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2})} + c'(x) = \underline{y\,e^{x^2}(1+2x^2)}$$

$$c'(x) = 0$$

$$c(x) = c$$

$$\Psi = y\,x\,e^{x^2} + c$$

Ilustrace ještě jiného postupu (viz skripta V.2.10, 2. metoda)

Pole je potenciální, křivkový integrál tedy nezávisí na cestě. Potenciál budeme počítat jako integrál z počátku $A = [0,0]$ do libovolného, ale pevně zvoleného bodu $X = [x_0, y_0]$ a integrační křivka z A do X bude složená ze dvou úseček spojených v bodě $B = [x_0, 0]$, tj. máme vodorovnou úsečku $\overrightarrow{AB}$ a na ni navazující svislou úsečku $\overrightarrow{BX}$.

$\overrightarrow{AB}:\ P_1(t) = [t, 0],\ t \in <0, x_0>, \quad \dot{P}_1(t) = (1,0),\ \|\dot{P}_1(t)\| = 1$

$\overrightarrow{BX}:\ P_2(t) = [x_0, t],\ t \in <0, y_0>, \quad \dot{P}_2(t) = (0,1),\ \|\dot{P}_2(t)\| = 1$

$$\Psi(X) - \Psi(A) = \int_A^X \vec{f}\,d\vec{s} = \int_A^B \vec{f}\,d\vec{s} + \int_B^X \vec{f}\,d\vec{s} = \int_0^{x_0} \vec{f}(P_1(t))\cdot(1,0)\,dt + \int_0^{y_0} \vec{f}(P_2(t))\cdot(0,1)\,dt =$$

$$= \int_0^{x_0} f_1(P_1(t))\,dt + \int_0^{y_0} f_2(P_2(t))\,dt = \int_0^{x_0} 0\cdot e^{t^2}(1+2t^2)\,dt + \int_0^{y_0} x_0\,e^{x_0^2}\,dt = 0 + y_0\,x_0\,e^{x_0^2}$$

$\Psi(X) = y\,x\,e^{x^2} + c \quad$ (proměnné $[x_0, y_0]$ jsme pouze přejmenovali na $[x, y]$)

Postup bychom mohli použít i pro volbu $B = [0, y_0]$, tj. z bodu A bychom nejdřív integrovali po svislé úsečce do bodu B a teprve pak po vodorovné do bodu X.