Parametrizace ploch

Jednoduchá hladká plocha je dána jako obor hodnot **parametrizace**
$P(u,v):\ B \subset E_2 \to E_3$
$P(u,v) = [\,x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)],\ u,v \in B,$

- hranici B tvoří uzavřená, jednoduchá p. č. hladká křivka Γ
- B je uzavřená množina, tj. $B = \Gamma \cup int\,\Gamma$

Pro funkci $P(u,v)$ musí platit, že

- je prostá na B
- má spojité a omezené parciální derivace P_u, P_v v B
- $\|P_u \times P_v\| \neq 0$ (tj. P_u, P_v jsou LN)

(poslední dvě podmínky nemusí platit v konečném počtu bodů na Γ)

Orientace plochy souhlasná s parametrizací je dána (jednotkovým) vektorem normály

$$\vec{n} = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|}$$

Jednoduchá po částech hladká plocha
vznikne pospojováním "navazujících" jednoduchých hladkých ploch
– přesná definice viz skripta

■ Parametrizace grafu funkce $z = f(x,y)$

Příklad 11.13

$z = 2x - 3y,\ x \in <-1,3>,\ y \in <2,4>$

$\dots\ P(u,v) = [u,\ v,\ 2u - 3v],\ B = <-1,3> \times <2,4>$

$$P_u \equiv \frac{\partial P}{\partial u} = (1,\ 0,\ \ 2)$$
$$P_v \equiv \frac{\partial P}{\partial v} = (0,\ 1, -3)$$
$$P_u \times P_v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 3, 1)$$
$$\|P_u \times P_v\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

Příklad 11.14

$z = x^2 + y^2,\ z \le 1\ \ \dots\ P(u,v) = [u,\ v,\ u^2 + v^2],\quad B : u^2 + v^2 \le 1$

$$P_u = (1,\ 0,\ 2u)$$
$$P_v = (0,\ 1,\ 2v)$$
$$P_u \times P_v = \left(\begin{vmatrix} 0 & 2u \\ 1 & 2v \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} 1 & 2u \\ 0 & 2v \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2u, -2v, 1)$$
$$\|P_u \times P_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

Při tomto typu parameterizace grafu funkce nenastane $\|P_u \times P_v\| = 0$ a vektor normály při souhlasné parametrizaci svírá ostrý úhel s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$ (tj. "míří nahoru").

■ Parametrizace válcové plochy (viz skripta, Poznámka IV.2.11)

Válcová plocha o poloměru R s osou z – použijeme cylindrické souřadnice:

$x = R\cos\varphi$

$y = R\sin\varphi$

$z = z$

$P(\varphi, z) = [R\cos\varphi,\ R\sin\varphi,\ z]\quad ,\quad B:\ \varphi \in <\varphi_1, \varphi_2>,\ z \in <z_1, z_2>$

$P_\varphi = (-R\sin\varphi,\ R\cos\varphi,\ 0)$

$P_z = (\ \ 0,\qquad 0,\qquad 1)$

$$P_\varphi \times P_z = \left(\begin{vmatrix} R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} -R\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -R\sin\varphi & R\cos\varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$$
$$\|P_\varphi \times P_z\| = \sqrt{R^2} = R \neq 0$$

Příklad 11.15

Parametrizujte část válcové plochy danou podmínkami $x^2+y^2=9,\ x\geq 0,\ z\in< -1,2 >$, orientovanou pomocí normály $\vec{n}=(0,1,0)$ v bodě [0, -3, 0], a uveďte, jestli parametrizace je souhlasná nebo nesouhlasná.

Řešení:

$x = 3\cos\varphi$

$y = 3\sin\varphi$

$z = z$

$P(\varphi,z) = [3\cos\varphi,\ 3\sin\varphi,\ z]\quad,\qquad B:\ \varphi\in< -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2} >,\ z\in< -1,2 >$

$P_\varphi = (-3\sin\varphi,\ 3\cos\varphi,\ 0)$

$P_z = (\quad 0,\qquad 0,\qquad 1)$

$$P_\varphi\times P_z = \left(\begin{vmatrix}3\cos\varphi & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-3\sin\varphi & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-3\sin\varphi & 3\cos\varphi\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right) = (3\cos\varphi, 3\sin\varphi, 0)$$

$\|P_\varphi\times P_z\| = 3$

Bod [0, -3, 0] odpovídá hodnotám parametru $\varphi=-\frac{\pi}{2}, z=0$:

$P(-\frac{\pi}{2},0) = [\,3\cos(-\frac{\pi}{2}),\ 3\sin(-\frac{\pi}{2}),\ 0] = [0,-3,0]$

$P_\varphi\times P_z\,|_{(-\frac{\pi}{2},0)} = (3\cos(-\frac{\pi}{2}), 3\sin(-\frac{\pi}{2}), 0) = (0,\ -3, 0)$ ... vektor opačný k $\vec{n}$

$\Rightarrow$ parametrizace je nesouhlasná

Pokračování příkladu

Uvažujte stejnou plochu jako v předchozím případě, s tím, že nyní je orientace plochy dána podmínkou, že její normála v bodě $[\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},0]$ svírá ostrý úhel s vektorem $\vec{v}=(2,1,-3)$. Rozhodněte, jestli výše uvedená parametrizace v tomto případě je souhlasná nebo nesouhlasná.

Řešení:

Úhel vektorů určíme pomocí skalárního součinu:

$P_\varphi\times P_z\,|_{(-\frac{\pi}{4},0)}\cdot\vec{v} = (\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},0)\cdot(2,1,-3) = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0\ \Rightarrow$ ostrý úhel,

tedy parametrizace je souhlasná.

■ Parametrizace rotačních ploch - funkcí x a y

Příklad 11.14, znova:
Parametrizujte plochu $z = x^2+y^2,\ z \leq 1$, normála svírá tupý úhel s vektorem $\vec{k} = (0,0,1)$.

Řešení:

v rov. xy použijeme polární souřadnice (viz skripta, Poznámka IV.2.11):

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$

$P(r,\varphi) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r^2]\quad,\qquad B:\ r \in< 0,1 >,\ \varphi \in< 0,2\pi >$

$P_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 2r)$

$P_\varphi = (-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0)$

$$P_r{\times}P_\varphi = \left(\begin{vmatrix}\sin\varphi & 2r\\ r\cos\varphi & 0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}\cos\varphi & 2r\\ -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}\right) = (-2r^2\cos\varphi,\ -2r^2\sin\varphi,\ r)$$

$$\|P_r \times P_\varphi\| = \sqrt{4r^4\cos^2\varphi + 4r^4\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$$

$(P_r \times P_\varphi)\cdot\vec{k} = (-2r^2\cos\varphi,\ -2r^2\sin\varphi,\ r)\cdot(0,0,1) = r > 0\ \Rightarrow$ ostrý úhel,
tedy parametrizace je nesouhlasná.

Příklad 11.15
Parametrizujte kuželovou plochu $z^2 = x^2+y^2,\ 0 \geq z \geq -2$,
normála svírá ostrý úhel s vektorem $(0,0,-1)$.

Řešení:

Použijeme cylindrické souřadnice (viz skripta, Poznámka IV.2.11):

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = -\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = -r$

$P(r,\varphi) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ -r]\quad,\qquad B:\ r \in< 0,2 >,\ \varphi \in< 0,2\pi >$

$P_r = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ -1)$

$P_\varphi = (-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi,\ 0)$

$$P_r \times P_\varphi = \left(\begin{vmatrix}\sin\varphi & -1\\ r\cos\varphi & 0\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}\cos\varphi & -1\\ -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}\right) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r)$$

$$\|P_r \times P_\varphi\| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2} = r\sqrt{2}$$

$(P_r \times P_\varphi)\cdot(0,0,-1) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r)\cdot(0,0,-1) = -r < 0\ \Rightarrow$ tupý úhel,
tedy parametrizace je nesouhlasná.

Příklad 11.16

Parametrizujte plochu $x^2+z^2=2, \quad 0 \le y \le 3, \quad 1 \le z, \quad \vec{n}(0,\,0,\,\sqrt{2}) = \vec{k} = (0,0,1)$, kde $\vec{n}(0,\,0,\,\sqrt{2})$ je jednotková normála v bodě $[0,\,0,\,\sqrt{2}]$.

Řešení:

v rov. xz můžeme použít polární souřadnice:

$x = \sqrt{2}\cos\varphi$

$z = \sqrt{2}\sin\varphi$

$y = y \ \ \ldots \ y$ je parametr plochy

$P(y,\varphi) = [\sqrt{2}\cos\varphi,\ y,\ \sqrt{2}\sin\varphi] \quad , \quad B:\ y \in <0,3>,\ \varphi \in <\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}>$

$P_y = (\quad 0, \quad 1, \quad 0)$

$P_\varphi = (-\sqrt{2}\sin\varphi,\ 0,\ \sqrt{2}\cos\varphi)$

$$P_y \times P_\varphi = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\cos\varphi \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\sin\varphi & \sqrt{2}\sin\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2}\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \right) = (\sqrt{2}\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$\|P_y \times P_\varphi\| = \sqrt{2\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = \sqrt{2}$$

$[0,\,0,\,\sqrt{2}] = P(y,\varphi)$: $\ y=0,\ 0 = x = \sqrt{2}\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad [0,\,0,\,\sqrt{2}] = P(0,\frac{\pi}{2})$

$(P_y \times P_\varphi)|_{(0,\frac{\pi}{2})} = (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2},\ 0,\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}) = (0,0,\sqrt{2})$

$$\frac{P_y \times P_\varphi}{\|P_y \times P_\varphi\|}(0,\frac{\pi}{2}) = (0,0,1) = \vec{n}(0,\,0,\,\sqrt{2}) \ \Rightarrow \ \text{tedy parametrizace je souhlasná.}$$

Jiné řešení:

plochu můžeme parametrizovat jako funkci $z = \sqrt{2-x^2}$:

$P(x,y) = [x,\ y,\ \sqrt{2-x^2}] \quad , \quad B:\ x \in <-1,1>,\ y \in <0,3>$

$P_x = (1,\ 0, -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}})$

$P_y = (0,\ 1, \quad 0)$

$$P_x \times P_y = \left(\begin{vmatrix} 0 & -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2}},\ 0,\ 1 \right)$$

$$\|P_x \times P_y\| = \sqrt{\tfrac{x^2}{2-x^2} + 1} = \sqrt{\tfrac{x^2+2-x^2}{2-x^2}} = \sqrt{\tfrac{2}{2-x^2}}$$

$[0,\,0,\,\sqrt{2}] = P(0,0)$

$$\frac{P_x \times P_y}{\|P_x \times P_y\|}(0,0) = \frac{(0,0,1)}{\sqrt{\frac{2}{2}}} = (0,0,1) = \vec{n}(0,\,0,\,\sqrt{2}) \ \Rightarrow \ \text{parametrizace je souhlasná.}$$