Gaussova-Ostrogradského věta (skripta IV.5.7)

Předpokládáme, že

- $\vec{f}$ má spojité parciální derivace v oblasti Ω
- σ je uzavřená jednoduchá p. č. hladká plocha, orientovaná vnější normálou, $\sigma \subset \Omega$, $int\ \sigma \subset \Omega$

Pak platí

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{f}\, d\vec{p} = \iiint\limits_{int\ \sigma} \operatorname{div}\ \vec{f}\, dx\, dy\, dz\ .$$

Je-li plocha orientovaná směrem dovnitř, před integrál vpravo musíme psát minus.

Opakování

Divergence vektorového pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ (skripta IV.5.2):

$$\operatorname{div}\ \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Rotace vektorového pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ (skripta IV.5.3):

$$\operatorname{rot}\ \vec{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

mnemotechnické schéma:

$$\operatorname{rot}\ \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Nechť φ a $\vec{f}$ mají v oblasti Ω spojité druhé parciální derivace. Potom (IV.5.4)

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\ \varphi = \vec{0}, \qquad \operatorname{div}\ \operatorname{rot}\ \vec{f} = 0\ .$$

Příklad 13.1

Určete tok pole $\vec{f} = (x,\ y,\ z)$ povrchem tělesa $K = \{[x,y,z] \in E_3 :\ x^2+y^2 \le z \le 4\}$ směrem dovnitř (je to **Př. 12.10** z minulého týdne).

Řešení s použitím G.-O. věty: $\vec{f}$ má spoj. parc. der. v E_3,

$$\text{tok} = \iint\limits_{\partial K} \vec{f}\, d\vec{p} = \boxed{-} \iiint\limits_{K} \text{div } \vec{f}\ dx\,dy\,dz = -\iiint\limits_{K} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\ dx\,dy\,dz =$$

$$= -\iiint\limits_{K} 1{+}1{+}1\ dx\,dy\,dz = -3 \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{4} 1\,dz \right) dx\,dy\ = -3 \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} 4{-}x^2{-}y^2\ dx\,dy =$$

$$= 3 \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} x^2+y^2-4\ dx\,dy \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ \varphi \in <0, 2\pi> \\ r \in <0, 2> \\ dxdy \to r\,dr d\varphi \end{array} \right| = 3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2} (r^2-4)\ r\,dr d\varphi = 6\pi \left[\frac{r^4}{4} - 2r^2 \right]_0^2 =$$

$$= 6\pi(4-8) = -24\pi$$

Příklad 13.2

Určete tok pole $\vec{f} = (2x,\ 3y,\ z^2)$ plochou $\mathcal{Q}$, která je povrchem jednotkové kostky $K = <0,1> \times <0,1> \times <0,1>$, orientovanou vně.

Řešení:

$\vec{f}$ má spoj. parc. der. v E_3,

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2+3+2z = 5+2z$$

$$\text{tok} = \iint\limits_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iiint\limits_{K} \text{div } \vec{f}\ dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{K} 5+2z\ dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 5+2z\ dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 5+2z\ dz \cdot \int\limits_0^1 1\ dx \cdot \int\limits_0^1 1\ dy = [5z+z^2]_0^1 = 5+1 = 6$$

Příklad 13.3

Určete tok pole $\vec{f} = (xy^2,\, yz,\, x^2z)$ plochou $\mathcal{Q}$, která je povrchem tělesa omezeného plochami $x^2+y^2 \le 4$, $z=1$ a $z=3$, orientovanou vně.

Řešení:

$\vec{f}$ má spoj. parc. der. v E_3, $\quad \operatorname{div} \vec{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z} = y^2 + z + x^2$

$\mathcal{Q}$ je hranice tělesa $K = \{[x,y,z] \in E_3 :\ x^2+y^2 \le 4,\ 1 \le z \le 3\}$,

$$\text{tok} = \iint_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iiint_K y^2+z+x^2\; dx\, dy\, dz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \\ \varphi \in <0, 2\pi> \\ r \in <0, 2> \\ z \in <1, 3> \\ dxdydz \to r\, dr d\varphi dz \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^3 (r^2+z)\, r\; dz\; dr\; d\varphi = 2\pi \int_0^2 r\left[r^2 z + \frac{z^2}{2}\right]_{z=1}^3 dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r\,(2r^2+4)\, dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{2} + 2r^2\right]_0^2 = 2\pi(8+8) = 32\pi$$

Příklad 13.4

Určete tok pole $\vec{f} = (\frac{x}{x^2+y^2},\, \frac{y}{x^2+y^2},\, x^2+z)$ plochou $\mathcal{Q}$, která je povrchem kvádru $K = <0,1> \times <1,3> \times <2,5>$, orientovanou vnitřní normálou.

Řešení:

$\vec{f}$ má spoj. parc. der. v $\Omega = E_3 - [0,0]$, $K \subset \Omega$, $\mathcal{Q} \subset \Omega$,

$\operatorname{div} \vec{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = 1$

$$\text{tok} = \iint_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = -\iiint_K \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = -\iiint_K 1\; dx\, dy\, dz = -\int_0^1\int_1^3\int_2^5 1\; dx\, dy\, dz =$$

$$= -1 \cdot (3-1) \cdot (5-2) = -6$$

Příklad 13.5

Určete tok pole $\vec{f} = (y,\ -x,\ z^2)$ plochou $\mathcal{Q}$, která je povrchem tělesa omezeného plochami $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$, a je orientovaná vnější normálou.

Řešení:

$\vec{f}$ má spoj. parc. der. v E_3, $\quad \operatorname{div} \vec{f} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y} + \dfrac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$

$\mathcal{Q}$ je hranice tělesa $K = \{[x, y, z] \in E_3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ 0 \leq z\}$,

$$\text{tok} = \iint\limits_{\mathcal{Q}} \vec{f}\, d\vec{p} = \iiint\limits_{K} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{K} 2z\ dx\, dy\, dz \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \\ \varphi \in < 0, 2\pi > \\ \vartheta \in < 0, \frac{\pi}{2} > \\ r \in < 0, 4 > \\ dxdydz \to r^2\cos\vartheta\, dr d\varphi d\vartheta \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{4} 2\, r \sin\vartheta\, r^2 \cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{4} r^3 \sin(2\vartheta)\, dr\, d\vartheta = 2\pi \left[-\frac{\cos(2\vartheta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^4 = 128\pi$$