Křivkový integrál skalární funkce

Předpokládáme, že

- $\mathcal{C}$ je jednoduchá hladká křivka
- $P(t) = [x(t), y(t)]$ je parametrizace $\mathcal{C}$ na $< a, b >$
- f je definovaná a omezená na $\mathcal{C}$

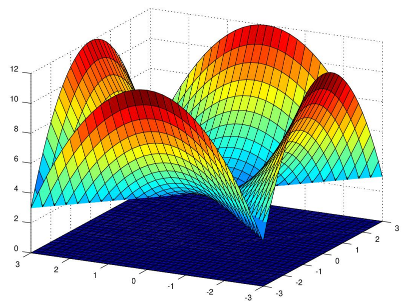
Křivkový integrál f podél $\mathcal{C}$ definujeme jako

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds \equiv \int\limits_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\ dt\ ,$$

pokud integrál vpravo existuje. Podobně pro $f(x, y, z)$.

Příklad 9.1

Spočítejte plochu jednoho (ze čtyř) skleněného průčelí budovy, jejíž střecha má tvar hyperbolického paraboloidu, který můžeme popsat rovnicí $z = |x^2 - y^2| + 3$. Budova má čtvercový půdorys $< -3, 3 > \times < -3, 3 >$. Obrázek vpravo představuje střechu budovy nad jejím půdorysem.



Řešení: plochu lze spočítat jako křivkový integrál skalární funkce
$f(x, y) = |x^2 - y^2| + 3$
podél úsečky tvořící jednu hranu půdorysu, tj. např.
z bodu $\mathbf{A} = [-3, 3]$ do bodu $\mathbf{B} = [3, 3]$. Parametrizace úsečky:

$P(t) = [6t - 3,\ 3],\ t \in < 0, 1 >$

$\dot{P}(t) = (6, 0), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{36 + 0} = 6$

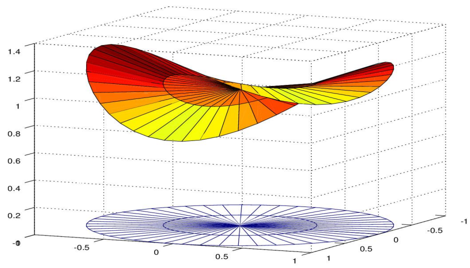
$$S = \int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{AB} |x^2 - y^2| + 3\ ds = \int\limits_0^1 (|(6t-3)^2 - 3^2| + 3) \cdot 6\,dt =$$

$$= 6 \int_0^1 |36t^2 - 36t + 9 - 9| + 3\,dt = 6 \int_0^1 36|t^2 - t| + 3\,dt = 18 \int_0^1 12\,(-t^2 + t) + 1\,dt =$$

$$= 18 \left[-12\,(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}) + t \right]_0^1 = 18\,(-4 + 6 + 1) = 18 \cdot 3 = 54$$

Příklad 9.2

Spočítejte plochu skleněného průčelí budovy podobné budějovické plovárně (obrázek vlevo). Střecha má tvar hyperbolického paraboloidu, který můžeme popsat rovnicí $z = 0.25\,(x^2 - y^2) + 1$. Skleněné průčelí má půdorys části kružnice o poloměru 1, dané úhlem od -30° do 30°. Obrázek vpravo představuje střechu budovy nad jejím půdorysem. (Zvolené jednotky odpovídají spíš nějakému malému modelu.)



Řešení: plochu lze spočítat jako křivkový integrál skalární funkce
$f(x, y) = 0.25\,(x^2 - y^2) + 1$
podél části kružnice představující půdorys skleněného průčelí.
Parametrizace odpovídající části kružnice:
$\mathcal{C} : P(t) = [\cos t,\ \sin t],\ t \in < -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} >$

$\dot{P}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$$S = \int_{\mathcal{C}} f(x, y)\,ds = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{4}\,(x^2 - y^2) + 1\ ds = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{4}\,(\cos^2 t - \sin^2 t) + 1 \right) \cdot 1\,dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4} \cos 2t + 1\,dt = \left[\frac{1}{8} \sin 2t + t \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{1}{8}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{\pi}{6}) \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$$

Výpočet integrálu na jednoduché p.č. hladké křivce

Nechť $\mathcal{C}$ je jednoduchá p.č. hladká křivka, která se skládá z jednoduchých hladkých křivek $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\dots$ $\mathcal{C}_n$. Pak můžeme křivkový integrál počítat po jednotlivých křivkách a sečíst:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f\,ds = \int\limits_{\mathcal{C}_1} f\,ds + \int\limits_{\mathcal{C}_2} f\,ds + \dots \int\limits_{\mathcal{C}_n} f\,ds$$

Příklad 9.3

Vypočítejte integrál $\int\limits_{\mathcal{C}} x^2 + y^2\,ds$, kde křivka $\mathcal{C}$ představuje hranici množiny $M = \{[x, y] \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

Řešení: $\mathcal{C}$ se skládá ze dvou jednoduchých hladkých křivek: $\mathcal{C}_1$ je úsečka z $\mathbf{A} = [0, -2]$ do $\mathbf{B} = [0, 2]$ a $\mathcal{C}_2$ je půlkružnice o poloměru 2 z bodu $\mathbf{B}$ do bodu $\mathbf{A}$ v kladném směru.

$\mathcal{C}_1 : P(t) = [0,\ t],\ t \in < -2, 2 >$

$\dot{P}(t) = (0, 1), \quad \|\dot{P}(t)\| = 1$

$$I_1 = \int\limits_{\mathcal{C}_1} x^2 + y^2\,ds = \int\limits_{-2}^{2} t^2 \cdot 1\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

$\mathcal{C}_2 : P(t) = [2\cos t,\ 2\sin t],\ t \in < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} >$

$\dot{P}(t) = (-2\sin t, 2\cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = 2$

$$I_2 = \int\limits_{\mathcal{C}_2} x^2 + y^2\,ds = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t) \cdot 2\ dt = 8 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1\ dt = 8\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 8\pi$$

$$\int\limits_{\mathcal{C}} x^2 + y^2\,ds = I_1 + I_2 = \frac{16}{3} + 8\pi$$

Postačující podmínky existence křivkového integrálu

- $\mathcal{C}$ je jednoduchá hladká křivka
- f je spojitá na $\mathcal{C}$

pak funkce f je na křivce $\mathcal{C}$ integrovatelná (tj. křivkový integrál f podél $\mathcal{C}$ existuje)

Příklad 9.4

Zdůvodněte, na kterých křivkách

a) $\mathcal{C} : P(t) = [t-1,\ t],\ t \in < 0, 1 >$

b) $\mathcal{C} : P(t) = [t-1,\ t],\ t \in < 0, 2 >$

c) $\mathcal{C} : P(t) = [t-1,\ t],\ t \in < 0, 3 >$

existuje integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2x+y-4}\, ds$$

a pokud existuje, vypočítejte jej.

Řešení: funkce $f(x,y) = \frac{1}{2x+y-4}$ je definována v R^2 kromě přímky $y = 4-2x$ a je spojitá ve svém definičním oboru. V okolí té přímky ale není omezená.

Integrál na křivce a) existuje, protože $\mathcal{C}$ je jednoduchá hl. křivka a f je spojitá na $\mathcal{C}$. Na křivkách b) a c) neexistuje, protože f na těchto křivkách není omezená (pozor: to, že na nich v jednom bodě není definovaná, nevadí, protože integrál nezávisí na množině míry nula).

a) $\dot{P}(t) = (1,\ 1), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2x+y-4}\, ds = \int_0^1 \frac{1}{2(t-1)+t-4}\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{3t-6}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 \frac{1}{t-2}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\,[\ln|t-2|]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,(\ln 1 - \ln 2) = -\frac{\sqrt{2}}{3}\,\ln 2$$

Příklad 9.5

Zdůvodněte, na kterých křivkách zadaných jako kružnice o poloměru 2 a středu $\mathbf{S}$, existuje integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{x^2+y^2}\, ds$$

jeden z těch existujících si vyberte a vypočítejte jej.

a) $\mathbf{S} = [0,0]$, b) $\mathbf{S} = [2,0]$, c) $\mathbf{S} = [0,-4]$.

Řešení: funkce $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je definována v R^2 kromě počátku a je spojitá ve svém definičním oboru. V počátku má limitu ∞.

Integrály na křivkách a) a c) existují, protože kružnice (v polárních souřadnicích) je jednoduchá hl. křivka a f je na ní spojitá. Na křivce b) neexistuje, protože f na ní není omezená. Vybereme si integrál a), protože pro funkci i křivku jsou výhodné stejné souřadnice:

$P(t) = [2\cos t,\ 2\sin t], \quad t \in < 0, 2\pi >$
$\dot{P}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t), \quad \|\dot{P}(t)\| = 2$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{x^2+y^2}\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} \cdot 2\ dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$

Příklad 9.6

Určete délku a moment setrvačnosti vzhledem k ose z pružiny, která má délkovou hustotu $\rho(x,y,z) = z$ a tvar daný parametrizací
$x = \cos t$
$y = \sin t$
$z = \frac{a\,t}{2\pi} - \frac{a}{4}, \quad t \in < \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2} >,$
kde $a > 0$ je parametr.

Řešení:

$P(t) = [\cos t,\ \sin t,\ \frac{a\,t}{2\pi} - \frac{a}{4}]$
$\dot{P}(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ \frac{a}{2\pi}), \quad \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{a^2}{4\pi^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}}$

$$l = \int_{\mathcal{C}} 1\, ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{4\pi+\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}}\ dt = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}}(4\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = 4\pi\sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}} = 2\sqrt{4\pi^2 + a^2}$$

$$J_z = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z)\, ds = \int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)\, z\, ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{4\pi+\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \left(\frac{a\,t}{2\pi} - \frac{a}{4}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}}\ dt =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{a}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{4\pi+\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\ dt = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{a}{2\pi} \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{4\pi+\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{4\pi^2}} \cdot \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{16\pi^2}{2} = 2a\sqrt{4\pi^2 + a^2}$$