Opakování (ze střední školy a z 1. semestru)

Sami si zopakujte z 1. semestru zejména:

- limity (ty jednoduché poznat na první pohled)
- derivování (rychle a bez chyb)
- integrování
- vlastní čísla a vlastní vektory matic 2x2 (i komplexní) a jejich geometrický význam ve 2D

Posloupnosti: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Příklad 1.1:

(a) $a_k = \frac{k}{k+2}$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1/3,\ 2/4,\ 3/5, \dots\}$

(b) $a_k = \sin(k\,\frac{\pi}{2})$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1,\ 0,\ -1,\ 0\dots\}$

(c) $\{-2,\ 3,\ 8,\ 13, \dots\}$ ... aritmetická, $d = 5$

obecně $\{a_0,\ a_0 + d,\ a_0 + 2d, \dots\}$, tj. $a_k = a_{k-1} + d = a_0 + k\,d$

(d) $a_k = \ln(1 + 1/k)$

Jaké jsou limity těchto posloupností? Které z nich jsou konvergentní?

Číselné řady: $\sum a_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ... n-tý částečný součet řady $\sum a_k$

$r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ ... zbytek po n-tém částečném součtu řady $\sum a_k$

řada $\sum a_k$ je **konvergentní** $\Leftrightarrow$ existuje $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$; s nazýváme součtem řady

jinak je řada divergentní (tj. když limita s_n je nevlastní nebo neexistuje)

Příklad 1.2: zapište předchozí posloupnosti jako řady. Které jsou konvergentní (určete součet)?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \dots$

posloupnost $\{a_k\}$ je kladná a rostoucí, tedy $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k > n \cdot a_1 = \frac{n}{3} \to \infty$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\,\frac{\pi}{2}) = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots$

$s_1 = s_2 = 1, s_3 = s_4 = 0, s_5 = s_6 = 1, \dots$ – limita s_n neex.

(c) $-2 + 3 + 8 + 13 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}(-2 + 5k)$, $s_n = -2(n+1) + 5\sum_{k=0}^{n} k = -2(n+1) + 5n(n-1)/2 \to \infty$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 1/k) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \dots = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots$, $s_n = \ln(n+1) \to \infty$

Geometrická řada: $\{a_0,\ a_0 \cdot q,\ a_0 \cdot q^2, \dots\}$, tj. $a_k = a_{k-1} \cdot q = a_0 \cdot q^k$

$s_n = a_0\,(1 + q + q^2 + \dots + q^n) = a_0\,\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

pro $|q| < 1$ je $\lim s_n = \dfrac{a_0}{1 - q}$, pro $|q| \geq 1$ neexistuje vlastní limita – řada diverguje.

Příklad: $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ \dots \ = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2 \cdot (\tfrac{1}{2})^k$, $q = \dfrac{1}{2}$, $s = \dfrac{a_0}{1 - q} = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$

Nutná podmínka pro konvergenci řady: $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0.$

Je to i postačující podmínka? Zkuste najít protipříklad.

Poznámka: konvergence řady *nezávisí na hodnotách konečného počtu* jejích členů.
(Součet samozřejmě ano.)

Řady funkcí:

$\sum_k f_k(x) \ \equiv \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) \ = \ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$

řada $\sum_k f_k(x)$ **konverguje v bodě** x_0 $\Leftrightarrow$ *číselná* řada $\sum_k f_k(x_0)$ je konvergentní

obor konvergence je množina bodů, v nichž řada konverguje

Příklad 1.3: určete obory konvergence řad

- $\sum_k k \cdot x$ [$s_n = x \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k$, obor konv. je $\{0\}$]
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\ln x)^k$ [pro pevné x je to geom. řada, $q = \ln x$: pro $|\ln x| < 1$ je $s = \frac{1}{1 - \ln x}$,

  pro $|\ln x| \geq 1$ řada diverguje, obor konv. je $(\mathrm{e}^{-1},\, \mathrm{e})$]
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (x^2 - 3)^k$ [pro pevné x je to geom. řada, $q = x^2 - 3$: pro $|x^2 - 3| < 1$ je $s = \frac{1}{4 - x^2}$,

  pro $|x^2 - 3| \geq 1$ řada diverguje, obor konv. je $(-2,\, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\, 2)$]

Mocninná řada se středem x_0 a koeficienty c_k je $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\,(x - x_0)^k$

interval konvergence je $I = (x_0 - R,\, x_0 + R)$, $R \geq 0$ nebo $R = \infty$
(*obor* konvergence může zahrnovat navíc i jeden nebo oba krajní body)

Příklad 1.4: určete obory konvergence mocninných řad

- $\sum_k x^k$

  – pro pevné x je to geom. řada ($q = x$): obor konv. je $|x| < 1 \Rightarrow x \in (-1,\, 1)$
- $\sum_k (x + 2)^k$

  – geom. řada ($q = x + 2$): obor konv. je $|x + 2| < 1 \Rightarrow x \in (-3,\, -1)$

- $\sum_k 7\,(x-12)^k$

  – geom. řada ($q = x-12$): obor konv. je $|x-12| < 1 \Rightarrow x \in (-13,\, -11)$

- $\sum_k \frac{x^k}{3^{k-1}}$

  – geom. řada ($q = \frac{x}{3},\ a_0 = 3$): pro $|\frac{x}{3}| < 1$ je $s = \frac{3}{1-x/3}$, obor konv. je $(-3,\, 3)$

Taylorův polynom

Nechť reálná funkce f má $(n+1)$-ní spoj. derivaci na intervalu I, $x_0, x \in I$. Pak

$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde

$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$ ... Taylorův polynom

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ pro nějaké $\xi \in (x_0, x)$ ... zbytek v Lagrangeově tvaru

Příklad 1.5: napište Taylorův polynom $T_3(x)$ se středem $x_0 = 1$ a zbytek $R_4(x)$ pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

der.	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0.	e^{2x}	e^2
1.	$2\,\mathrm{e}^{2x}$	$2\,\mathrm{e}^2$
2.	$4\,\mathrm{e}^{2x}$	$4\,\mathrm{e}^2$
3.	$8\,\mathrm{e}^{2x}$	$8\,\mathrm{e}^2$
4.	$16\,\mathrm{e}^{2x}$	

$T_3(x) = \mathrm{e}^2 + 2\,\mathrm{e}^2\,(x-1) + \frac{4\,\mathrm{e}^2}{2!}\,(x-1)^2 + \frac{8\,\mathrm{e}^2}{3!}\,(x-1)^3, \quad R_4(x) = \frac{16\,\mathrm{e}^{2\xi}}{(4)!}\,(x-1)^4$

Taylorova řada

Nechť reálná funkce f je definovaná v okolí bodu x_0 a má v něm derivace všech řádů.
Taylorova řada funkce f o středu x_0 je

$$f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

Příklad 1.6: napište Taylorovu řadu se středem v nule funkcí $\mathrm{e}^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln(1+x)$.

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ , \quad x \in R$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ , \quad x \in R$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ , \quad x \in R$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\ , \quad x \in (-1,\, 1\rangle$

Otázky:

- Pro jaká x konverguje Taylorova řada $f(x)$?
- Když pro x konverguje, konverguje k $f(x)$?

Příklad 1.7: napište Taylorovu řadu funkce $\frac{1}{1-x}$ se středem $x_0 = 0$:

k-tá derivace $(\frac{1}{1-x})^{(k)}$ v bodě $x_0 = 0$ je $k!(1-x)^{-(k+1)}|_{x=0} = k!$

Tayl. řada: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

– geom. řada, konv. pouze pro $|x| < 1$, pak její součet je opravdu $\frac{1}{1-x}$

Platí: **Mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu na intervalu konvergence.**

– takže pro funkci $\frac{1}{1-x}$ můžeme napsat její Taylorovu řadu bez derivování,
když si ji představíme jako součet geometrické řady