Fourierovy řady – opakování

Fourierovy koeficienty f:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x$$

Fourierova řada f:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L} + b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right) ,$$

Diferenciální rovnice 1. řádu

Dif. rovnice 1. řádu (v normálním tvaru): nechť $f(x,y)$ je spoj. funkce dvou proměnných,

$$y' = f(x,y)\ , \quad [x,y] \in G\ \ldots \text{ oblast (otevřená souvislá množina)} \tag{1}$$

Řešení rovnice (1) v G: funkce $y(x)$ def. na intervalu I, která má na I spojitou derivaci, splňuje rovnici (1) a pro kterou platí $x \in I \ \Rightarrow\ [x, y(x)] \in G$.

Maximální řešení v G: takové, k němuž neexistuje (vlastní) prodloužení v G
(řešení $y1$ na intervalu J se nazývá prodloužení y na I, pokud $I \subset J$ a $y1(x) = y(x)$ na I).

Integrální křivka: graf řešení

Směrové pole: vektorové pole $\vec{\tau} = (1, f(x,y))$

Věta - o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných, pro kterou platí:

- $f(x,y)$ je spojitá v G (existence)
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ je spojitá v G (jednoznačnost)

Pak pro každý bod $[x_0,\ y_0] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení úlohy (1), pro které $y(x_0) = y_0$.
Jinými slovy: každým bodem $[x_0,\ y_0] \in G$ prochází právě jedna integrální křivka.
O intervalu I max. řešení obecně nelze nic říct (jen že $x_0 \in I$).

Počáteční (Cauchyho) úloha:

$$y' = f(x,y)\ , \quad y(x_0) = y_0$$

Příklad 5.1: Je dána funkce

$$f(x) = \frac{x}{\pi}\,, \quad x \in (-\pi,\, \pi).$$

(a) Na intervalu $\langle -2\pi,\, 4\pi \rangle$ zakreslete graf 2π-periodické funkce $\widetilde{f}(x)$, která vznikne periodickým rozšířením $f(x)$ na interval $(-\infty,\, \infty)$.

(b) Vypočítejte koeficienty Fourierovy řady funkce $\widetilde{f}(x)$.

(c) Zapište výslednou Fourierovu řadu. Zapište součet jejích prvních tří nenulových členů.

(d) Určete součet $s(x)$ Fourierovy řady na intervalu $\langle -2\pi,\, 4\pi \rangle$ a načrtněte graf $s(x)$. Speciálně určete funkční hodnoty $s(0),\; s(\frac{\pi}{2}),\; s(\pi),\; s(2\pi)$.

Řešení:

(a)

(b) f je lichá, takže $a_k = 0 \;\; \forall\, k$

$$b_k = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,\sin\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi}\,\sin(k\,x)\,\mathrm{d}x \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin(k\,x) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\,\cos(k\,x) \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[-\frac{x}{k}\,\cos(k\,x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k\pi}\,\cos(k\pi) - \frac{1}{k\pi}\,\cos(-k\pi) + \left[\frac{1}{k^2\pi^2}\,\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\,\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}\frac{2}{k\pi}\,, \quad \forall\, k > 0$$

$b_1 = \frac{2}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{2}{2\pi}, \quad b_3 = \frac{2}{3\pi}, \quad \ldots$

(c)

$$\widetilde{f}(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin(kx) = \frac{2}{\pi}\,\sin x - \frac{2}{2\pi}\,\sin(2x) + \frac{2}{3\pi}\,\sin(3x) - \;\ldots$$

(d) $s(0) = s(\pi) = s(2\pi) = 0,\;\; s(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2},$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} + 2 & x \in \langle -2\pi,\, -\pi) \\ \frac{x}{\pi} & x \in (-\pi,\, \pi) \\ \frac{x}{\pi} - 2 & x \in (\pi,\, 3\pi) \\ \frac{x}{\pi} - 4 & x \in (3\pi,\, 4\pi\rangle \end{cases} \qquad\qquad s(k\pi) = 0,\;\; k \in \mathrm{Z}$$

Příklad 5.2: Je dána periodická funkce ($p = 2L = 2$)

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,\, 1\rangle \\ -1 & x \in (1,\, 2\rangle \end{cases}$$

(a) Na intervalu $\langle -2,\, 3\rangle$ zakreslete graf p-periodické funkce $\widetilde{f}(x)$, která vznikne periodickým rozšířením $f(x)$ na interval $(-\infty,\, \infty)$.

(b) Vypočítejte koeficienty Fourierovy řady funkce $\widetilde{f}(x)$.

(c) Zapište výslednou Fourierovu řadu. Zapište součet jejích prvních tří nenulových členů.

(d) Určete součet $s(x)$ Fourierovy řady na intervalu $\langle -2,\, 3\rangle$ a načrtněte graf $s(x)$.
Speciálně určete funkční hodnoty $s(-2),\ s(-1),\ s(0),\ s(1),\ s(2),\ s(3)$.

Řešení:

(a)

(b) $\widetilde{f}$ není sudá ani lichá (dál budeme pro jednoduchost psát f místo $\widetilde{f}$).

$a_0 = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} -1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = [-x]_{-1}^{0} + [\frac{x^2}{2}]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int\limits_{-1}^{0}\cos(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x\cos(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{k\pi}[\sin(k\pi x)]_{-1}^{0} + \frac{1}{k\pi}[x\sin(k\pi x)]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int\limits_{0}^{1}\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{k^2\pi^2}[\cos(k\pi x)]_0^1 = \frac{1}{k^2\pi^2}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2},\ \forall\, k > 0 \end{aligned}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{-2}{k^2\pi^2} & \text{pro } k \text{ liché} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{k\pi\, x}{L}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x == -\int\limits_{-1}^{0}\sin(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} x\sin(k\pi\, x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{k\pi}[\cos(k\pi x)]_{-1}^{0} - \frac{1}{k\pi}[x\cos(k\pi x)]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int\limits_{0}^{1}\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{k\pi}(1 - \cos(-k\pi)) - \frac{1}{k\pi}(\cos(k\pi) - 0) + \frac{1}{k^2\pi^2}[\sin(k\pi x)]_0^1 = \\ &= \frac{1}{k\pi}(1 - 2\cdot(-1)^k) + 0 = \begin{cases} -\frac{1}{k\pi} & \text{pro } k \text{ sudé} \\ \frac{3}{k\pi} & \text{pro } k \text{ liché} \end{cases} \end{aligned}$$

$a_1 = -\frac{2}{\pi^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{9\pi}, \quad \dots \quad b_1 = \frac{3}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{2\pi}, \quad b_3 = -\frac{3}{3\pi}, \quad \dots$

(c)

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi\, x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi\, x}{L} \right) =$$
$$= -\frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{3}{\pi} \sin(\pi x) \right) + \left(0 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right) + \dots$$

(d) $s(-2) = s(0) = s(2) = -\frac{1}{2}$, $s(-1) = s(1) = s(3) = 0$,

$$s(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1,\, 0) \cup (1,\, 2) \\ x & x \in (0,\, 1) \\ x+2 & x \in (-2,\, -1) \\ x-2 & x \in (2,\, 3) \end{cases}$$

Příklad 5.3: je dána rovnice

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

(a) Najděte oblasti existence a jednoznačnosti řešení rovnice.

(b) Ověřte, že $y = \sqrt{x^3 + 8}$ je řešení rovnice na $I = (0, \infty)$.
Je to maximální řešení rovnice? Pokud ne, najděte max. prodloužení tohoto řešení.

(c) Ověřte, že $y = \pm\sqrt{x^3 + c}$, $c \in R$, jsou řešení rovnice. Jaké jsou max. intervaly těchto řešení?

Řešení:

(a) $\mathcal{D}(f) = \{[x, y] \in R^2 : y \neq 0\}$; předpoklady V o ex. a jednozn. řešení:
f je spoj. v $\mathcal{D}(f)$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2}{2y^2}$ je spoj. v $\mathcal{D}(f)$
oblasti existence a jednoznačnosti řešení:
$G_1 = R \times (-\infty, 0)$
$G_2 = R \times (0, \infty)$

(b) funkce $y = \sqrt{x^3 + 8}$ je řešení úlohy: $[x, y(x)] \in G_2$,

$$\left. \begin{array}{l} L = y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}} \\ P = \frac{3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}} \end{array} \right\} \quad \text{L=P}$$

$\mathcal{D}(y) = \langle -2, \infty)$, $\mathcal{D}(y') = (-2, \infty)$, y i y' jsou spojité v $(-2, \infty)$,
dané řešení lze tedy prodloužit na interval $J = (-2, \infty)$.

(c) ověření podobně jako v předchozím bodě, intervaly existence jsou $(-\sqrt[3]{c}, \infty)$

Příklad 5.4 (pokračování 5.3): je dána počáteční (Cauchyho) úloha

$$y' = \frac{3x^2}{2y}, \qquad y(2) = -3$$

(a) Je $y = \sqrt{x^3 + 8}$ řešení úlohy?

(b) Je $y = -\sqrt{x^3 + 8}$ řešení úlohy?

(c) Najděte aspoň jedno max. řešení úlohy (s využitím výsledku příkladu 5.3).

(d) Existuje i jiné max. řeš. této úlohy? Zdůvodněte.

Řešení:

(a) graf funkce $y = \sqrt{x^3 + 8}$ leží v G_2, $[2, -3] \in G_1$ – není to tedy řešení dané C.ú.

(b) $y(2) = -\sqrt{2^3 + 8} = -\sqrt{16} = -4 \neq -3$ – není to tedy řešení dané C.ú.

(c) Obecné řešení rovnice je $y(x) = \pm\sqrt{x^3 + c}$, $c \in R$. Jelikož $[2, -3] \in G_1$, musíme se omezit na $y(x) = -\sqrt{x^3 + c}$, $c \in R$. Konstantu c určíme z počáteční podmínky:
$y(2) = -\sqrt{2^3 + c} = -3$, takže $\sqrt{2^3 + c} = 3 \;\Rightarrow\; 2^3 + c = 9 \;\Rightarrow\; c = 1$
maximální řešení dané C. ú.: $y = -\sqrt{x^3 + 1}, \quad x \in (-1, \infty)$

(d) Jiné maximální řešení neexistuje - v G_1 prochází každým bodem právě jedno maximální řešení (v příkladu 5.3 jsme ověřili předpoklady V o ex. a jednozn. řešení v oblasti G_1).

Metoda separace proměnných

Příklad 5.5: najděte obecné řešení rovnice

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

Řešení: oblasti ex. a jednozn. viz př. 5.3

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{3x^2}{2y} \\
2y\ \mathrm{d}y &= 3x^2\ \mathrm{d}x \\
\int 2y\ \mathrm{d}y &= \int 3x^2\ \mathrm{d}x \\
y^2 + c_1 &= x^3 + c_2 \\
y &= \pm\sqrt{x^3 + c}
\end{aligned}$$