Numerická integrace

n-bodové integrační pravidlo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\ , \quad \text{kde } w_i > 0 \ldots \text{váhy},\ x_i \in < a, b >$$

na normalizovaném intervalu $< -1, 1 >$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\ , \quad \text{kde } w_i > 0 \ldots \text{váhy},\ x_i \in < -1, 1 >$$

převod z normalizovaného intervalu na obecný interval $< a, b >$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)}{2}x + \frac{(b+a)}{2}\right) dx \approx \frac{(b-a)}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(\frac{(b-a)}{2}x_i + \frac{(b+a)}{2}\right)$$

integrační pravidlo řádu m – integruje přesně polynomy až do řádu m (včetně)

obecně: n libovolných různých bodů $\Rightarrow$ pravidlo řádu $m = n - 1$

n různých bodů *vhodně zvolených* $\Rightarrow$ **pravidla vyšších řádů**

lichoběžníkové pravidlo – dvoubodové pravidlo řádu $m = 1$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(f(b) - f(a))}{2}(b-a)$$

$$\text{tj.}\ \ x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad w_1 = -\frac{(b-a)}{2}, \quad w_2 = \frac{(b-a)}{2}, \quad n = 2$$

Simpsonovo pravidlo – tříbodové pravidlo řádu $m = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\ f(-1) + \frac{4}{3}\ f(0) + \frac{1}{3}\ f(1)$$

Důkaz, že přesně integruje polynomy z P^3:
$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$
$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0\,dx = \left[a_3\frac{x^4}{4} + a_2\frac{x^3}{3} + a_1\frac{x^2}{2} + a_0x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\ a_2 + 2\ a_0$
$\frac{1}{3}\ p(-1) + \frac{4}{3}\ p(0) + \frac{1}{3}\ p(1) = \frac{1}{3}\ (-a_3 + a_2 - a_1 + a_0) + \frac{4}{3}\ a_0 + \frac{1}{3}\ (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) = \frac{2}{3}\ a_2 + 2\ a_0$

Gaussova integrace

obecně: n bodů $\Rightarrow$ pravidlo řádu $m = 2n - 1$

jednobodové pravidlo (řádu $m = 1$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\; f\left(\frac{b+a}{2}\right)\;, \quad \text{resp.} \quad \int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx 2\,f\,(0)$$

princip Gaussovy kvadratury ukážeme na příkladu dvoubodového pravidla (tj. $n = 2$, $m = 3$):
Chceme přesně integrovat každou funkci v P^3, tedy ve tvaru $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$.
Napíšeme si ji jako součet dvou polynomů $f(x) = p(x) + q(x)$, kde

- $p(x_i) = f(x_i)$ všech integračních bodech x_i: pro $n = 2$ je tedy $p(x) \in P^1$, $p(x_1) = f(x_1)$, $p(x_2) = f(x_2)$ a platí $\int_{-1}^1 p(x)\,dx = \sum_{i=1}^2 w_i\,p(x_i)$ pro vhodně zvolené váhy w_i. Ty lze spočítat využitím faktu, že dvoubodové pravidlo přesně integruje polynomy prvního řádu. Dosazením např. $p(x) = 1$ a $p(x) = x$ dostaneme rovnice $\int_{-1}^1 1\,dx = w_1.1 + w_2.1 = 2$ a $\int_{-1}^1 x\,dx = w_1.x_1 + w_2.x_2 = 0$, ze kterých spočítáme váhy w_i pro libovlně zvolené integrační body x_i.
- $q(x)$ představuje zbytek, pro $m = 3$ je tedy $q(x) \in P^3$ a anuluje se ve všech integračních bodech x_i: $q(x) = (x - x_1)\,(x - x_2)\,q_1(x) = q_2(x)\,q_1(x)$, kde $q_1(x) \in P^1$.

Platí tedy

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 p(x)\,dx + \int_{-1}^1 q(x)\,dx = \sum_{i=1}^2 w_i\,p(x_i) + \int_{-1}^1 q_2(x)\,q_1(x)\,dx \tag{1}$$

pro libovolně zvolené body x_i.

Označme $\tilde{q}_2(x) \in P^2$ polynom ortogonální ke všem polynomům z P^1, tj. takový, pro který platí $\int_{-1}^1 \tilde{q}_2(x)\,q_1(x)\,dx = 0$ pro libovolný polynom $q_1(x) \in P^1$.

Pokud zvolíme body x_i jako kořeny $\tilde{q}_2(x)$, dostaneme $q_2(x) = \alpha\tilde{q}_2(x)$ (neboť kořeny určují polynom až na násobek), a tedy $\int_{-1}^1 q_2(x)\,q_1(x)\,dx = 0$. Takže druhý člen na pravé straně rovnice (1) se anuluje a první člen je roven $\sum_{i=1}^2 w_i\,f(x_i)$, protože $p(x_i) = f(x_i)$.

Ortogonální polynomy na intervalu $< -1, 1 >$ se nazývají **Legenderovy polynomy** a jejich kořeny jsou tabelované.

Kořeny $\tilde{q}_2(x)$ jsou $\pm 1/\sqrt{3}$. Pro tyto kořeny dopočítáme váhy postupem uvedeným výše jako $w_1 = w_2 = 1$ a dostaneme **dvoubodové Gaussovo integrační pravidlo**

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$$

Gaussovy kvadraturní vzorce:

počet bodů n	body x_i	váhy w_i
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0	$8/9$
	$\pm\sqrt{3/5}$	$5/9$
4	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$(18+\sqrt{30})/(36)$
	$\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$(18-\sqrt{30})/(36)$
5	0	$128/225$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{10/7}}$	$(322+13\sqrt{70})/900$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{10/7}}$	$(322-13\sqrt{70})/900$

Literatura na internetu:

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials`