Vlastnosti matic

Teorie (stručný výběr z přednášek)

Normy vektorů:

Vektorová norma v R^n je každá reálná funkce $x \to \|x\|$, která splňuje $\forall\, x,\, y \in R^n$, $\forall\, \alpha \in R$ tyto tři podmínky:

1. $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

sloupcová norma: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
euklidovská norma: $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
řádková norma: $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$

Normy matic:

p-norma $\|A\|_p$ matice A (budeme používat $p = 1,\ 2$ or ∞) je norma indukovaná vektorovou normou $\|x\|_p$ jako maximum $\|Ax\|_p$ ne jednotkové kružnici:

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \equiv \max_{\|x\|_p\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Frobeniova norma $\|A\|_F$ je odmocnina ze součtu všech diag. prvků $A^{\mathrm{T}}A$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Vlastnosti čtvercových matic:

Spektrální poloměr $\rho(A)$ matice A je maximum z abs. hodnot vlastních čísel:
$\rho(A) = \max_{i=1,\ldots n} |\lambda_i|$, kde λ_i jsou vl. č A

Stopa $tr(A)$ matice A je součet všech jejích diagonálních prvků.

A je *symetrická* $\iff$ $A = A^{\mathrm{T}}$.

A je *pozitivně definitní* $\iff$ $x^{\mathrm{T}}Ax > 0\ \forall x \neq 0$.

Číslo podmíněnosti $\kappa(A)$ matice A (vzhledem k normě $\|.\|$) je

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Matice je *diagonálně dominantní* (zkráceně *d.d.*), jestliže v každém řádku je absolutní hodnota diagonálního prvku větší nebo rovna součtu abs. hodnot všech ostatních prvků v daném řádku (nebo když to platí pro A^{T}).

Matice je *ostře diagonálně dominantní* (zkráceně *o.d.d.*), pokud všechny tyto nerovnosti jsou ostré.

Platí následující tvrzení:

1. $\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p \quad \forall x$
2. $\|A\|_1 = \max(\sum_i |a_{i1}|, \sum_i |a_{i2}|, \cdots \sum_i |a_{in}|)$ – *sloupcová norma*
3. $\|A\|_\infty = \max(\sum_j |a_{1j}|, \sum_j |a_{2j}|, \cdots \sum_j |a_{nj}|)$ – *řádková norma*
4. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ – *spektrální norma*
5. $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ (pro vektory je $\|x\|_2 = \|x\|_F$)
6. $\rho(A) \leq \|A\|$ pro *libovolnou* normu A .
7. A^k konverguje k nulové matici $\iff \rho(A) < 1$.

   Důsledek: jestliže pro některou (libovolnou) normu platí $\|A\| < 1$, pak A^k konverguje k nulové matici.
8. Je-li A symetrická, má *reálná* vlastní čísla a platí $\|A\|_2 = \rho(A)$ (pozor, $\rho(A)$ není maticová norma!)
9. Je-li A symetrická, pak je pozitivně definitní, právě když všechny její hlavní minory jsou kladné (Sylvestrovo kritérium).
10. Je-li A symetrická, pak je pozitivně definitní, právě když všechna její vlastní čísla jsou kladná.
11. Je-li A symetrická, o.d.d. a $a_{ii} > 0 \ \forall i$, pak A je pozitivně definitní.

Příklady

Normy vektorů a matic

Příklad 1

Je dána matice A a vektor y jako

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Spočítejte jejich řádkové, sloupcové a Frobeniovy normy.
Ověřte (pro danou matici a vektor), že pro všechny tyto normy platí

$$\|Ay\| \leq \|A\| \cdot \|y\| \ , \tag{1}$$

Řešení:

$Ay = (4, 14, -2)^T$

sloupcová norma (maximum součtů abs. hodnot ve sloupcích):
$\|A\|_1 = \max(\ |2| + |3| + |-3|,\ 0 + |-4| + |-2|) = \max(\ 8,\ 6) = 8$
$\|y\|_1 = |2| + |-2| = 4$
$\|Ay\|_1 = |4| + |14| + |-2| = 20$
$20 \leq 8 \cdot 4 = 32$

řádková norma (maximum součtů abs. hodnot v řádcích):
$\|A\|_\infty = \max(\ |2| + 0,\ |3| + |-4|,\ |-3| + |-2|) = \max(\ 2,\ 7,\ 5) = 7$
$\|y\|_\infty = \max(\ |2|,\ |-2|) = 2$
$\|Ay\|_\infty = \max(\ |4|,\ |14|,\ |-2|) = 14$
$14 \leq 7 \cdot 2 = 14$

Frobeniova norma:
$\|A\|_F = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{42} = 6.4807$
($\|A\|_2 \leq \|A\|_F$ – Frobeniova norma shora omezuje $\|A\|_2$ a snáze se určí)
$\|y\|_F = \|y\|_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2.8284$
$\|Ay\|_F = \|Ay\|_2 = \sqrt{4^2 + 14^2 + (-2)^2} = 14.6969$
$14.6969 \leq 6.4807 \cdot 2.8284 = 18.3300$

Pozor: vztah (1) obecně platí, jen když všechny uvedené normy jsou stejné!
Zkuste např. porovnat $\|Ay\|_1$ a $\|A\|_F$, $\|y\|_2$.

Spektrální poloměr

Příklad 2

Určete spektrální poloměr $\rho(A)$ matice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a ověřte, že $\rho(A) \leq \|A\|$ pro sloupcovou, řádkovou i Frobeniovu normu A.

Řešení:

$\det(A - \lambda I) \; = \; (-2-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i$

$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(-2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{5}$

$\rho(A) = \max(\,|\lambda_1|,\, |\lambda_2|) = \max(\,\sqrt{5},\, \sqrt{5}) = \sqrt{5} = 2.2361$

$\|A\|_F = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{10} = 3.1623$

$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \max(\,|-2| + |-1|,\; |1| + |-2|) = \max(\,3,\; 3) = 3$

$2.2361 < 3.1623, \quad 2.2361 < 3\;.$

Symetrie, pozitivní definitnost, diagonální dominance

Příklad 3

Jsou dány matice

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Které z nich jsou symetrické?
b) Které z nich jsou ostře diagonálně dominantní (o.d.d)?
c) Které z nich jsou symetrické pozitivně definitní (s.p.d.)?

Řešení:

a) Matice B a C jsou symetrické ($b_{ij} = b_{ji}\ \forall i, j$), A není (např. $a_{21} \neq a_{12}$).

b) Matice A – řádky:

$$\begin{array}{rcrcr} |-5| & > & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,3\,| & < & |\,3\,| & + & |\,1\,| \\ |\,2\,| & \geq & |\,1\,| & + & |-1| \end{array}$$

Podmínka neplatí pro druhý řádek $\Rightarrow$ A není d.d. po řádcích.
Zkusme sloupce:

$$\begin{array}{rcrcr} |-5| & > & |\,3\,| & + & |\,1\,| \\ |\,3\,| & > & |-1| & + & |-1| \\ |\,2\,| & > & |\,1\,| & + & |\,0\,| \end{array}$$

– podmínka platí pro všechny sloupce, navíc nerovnosti jsou ostré $\Rightarrow$ A je o.d.d. po sloupcích. Takže A je ostře diagonálně dominantní.

Matice B je symetrická – stačí tedy prověřit jen řádky (sloupce by vedly ke stejnému výsledku):

$$\begin{array}{rcrcr} |\,1\,| & \geq & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,2\,| & \geq & |-1| & + & |-1| \\ |\,2\,| & > & |\,0\,| & + & |-1| \end{array}$$

Podmínka platí pro všechny řádky, ale nerovnost není vždy ostrá $\Rightarrow$ B je diagonálně dominantní, ale ne ostře.

Matice C je symetrická – stačí prověřit jen řádky:

$$\begin{array}{rcrcr} |\,1\,| & \geq & |-1| & + & |\,0\,| \\ |\,1\,| & < & |-1| & + & |\,1\,| \\ |\,2\,| & > & |\,0\,| & + & |1| \end{array}$$

Matice C není d.d. po řádcích (tedy ani po sloupcích). Matice C tedy není diagonálně dominantní.

c) Symetrická matice je *pozitivně definitní*, právě když všechny její hlavní minory jsou kladné.

Matice A není symetrická, takže dál už nic ověřovat nemusíme.
Matice B je symetrická, spočítáme tedy její hlavní minory:

$$\det(1) = 1 > 0 \ , \ \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0 \ , \ \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, takže B je pozitivně definitní.

Matice C:

$$\det(1) = 1 > 0 \ , \quad \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

– druhý hlavní minor není kladný, dál už tedy nic ověřovat nemusíme: matice C není pozitivně definitní.

Závěr:

Matice A je ostře diagonálně dominantní, není symetrická, takže není symetrická pozitivně definitní.

Matice B je diagonálně dominantní (ne ostře) a je symetrická pozitivně definitní.

Matice C je symetrická, není diagonálně dominantní ani pozitivně definitní.