Newtonova metoda

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Newtonova metoda

Soustavu nelineárních rovnic $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ řešíme tak, že

1. spočítáme Jacobiovu matici

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2. zvolíme $\mathbf{x}^{(0)}$

3. pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
   3.1 spočítáme vektor $\mathbf{d}^{(k)}$ jako řešení soustavy
   $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\,\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$
   3.2 položíme $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}$

Pro každý vektor $\mathbf{x}^{(k)}$ musí být matice $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ regulární, aby soustava v bodě 3.1 měla právě jedno řešení (pokud pro nějaké k matice $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})$ není regulární, zvolíme $x^{(0)}$ jinak a začneme znova).

Příklad 1

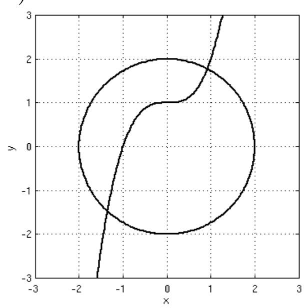
Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 4 \\ x_2 &= x_1^3 + 1 \end{aligned}$$

a) Znázorněte řešení graficky.
b) Zvolte $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ 2)^T$ a určete první dvě iterace Newtonovou metodou.
c) Mohli bychom zvolit $\mathbf{x}^{(0)} = (1,\ -1/3)^T$? Odpověď odůvodněte.

Řešení

a)



b) Soustavu rovnic převedeme na vektorový tvar

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_2 - x_1^3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}\,, \quad \text{kde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a spočítáme Jakobiovu matici

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -3x_1^2 & 1 \end{bmatrix}$$

První iterace Newtonovy metody:

- spočítáme vektor $\mathbf{d}^{(0)} = (d_1^{(0)}, d_2^{(0)})^T$ jako řešení soustavy
  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)})\,\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$:
  po dosazení $\mathbf{x}^{(0)} = (\,1,\,2)^T$ dostaneme

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ -3 \cdot 1^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 - 4 \\ 2 - 1^3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

napíšeme si soustavu a vypočítáme $\mathbf{d}^{(0)}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1/14 \\ -3/14 \end{bmatrix}$$

- vypočítáme $\mathbf{x}^{(1)}$:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/14 \\ -3/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/14 \\ 25/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9286 \\ 1.7857 \end{bmatrix}$$

Druhá iterace Newtonovy metody:

- spočítáme vektor $\mathbf{d}^{(1)} = (d_1^{(1)}, d_2^{(1)})^T$ jako řešení soustavy
  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(1)})\,\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)})$:
  po dosazení $\mathbf{x}^{(1)} = (\,13/14,\ 25/14)^T$ dostaneme

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 2\cdot 13/14 & 2\cdot 25/14 \\ -3\cdot(13/14)^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/7 & 25/7 \\ -507/196 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} (13/14)^2 + (25/14)^2 - 4 \\ 25/14 - (13/14)^3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/98 \\ -41/2744 \end{bmatrix}$$

napíšeme si soustavu a vypočítáme $\mathbf{d}^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 13/7 & 25/7 \\ -507/196 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 5/98 \\ -41/2744 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -105/11161 \\ -11/1171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.009408 \\ -0.009394 \end{bmatrix}$$

- vypočítáme $\mathbf{x}^{(2)}$:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 13/14 \\ 25/14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -105/11161 \\ -11/1171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1319/1435 \\ 4876/2745 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9192 \\ 1.7763 \end{bmatrix}$$

c)
Spočítáme $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)})$:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-1/3) \\ -3\cdot 1^2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2/3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tato matice není regulární (řádky jsou lineárně závislé), takže rovnice v bodě 3.1 Newtonovy metody by nebyla jednoznačně řešitelná. Z toho plyne, že počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$ musíme zvolit jinak.