ODR - Collatzova metoda

Rovnice s počáteční podmínkou (Cauchyova úloha) 1. řádu v normálním tvaru:

$$y' = f(x,y)\ , \quad \text{počáteční podmínka } y(x^{(0)}) = y^{(0)}\,. \tag{1}$$

Motivace pro Collatzovu metodu: explicitní Eulerovu metodu lze odvodit dosazením první dopředné diference místo derivace na levé straně rovnice. První dopředná diference aproximuje derivaci s chybou $\mathcal{O}(h)$.

Co kdybychom místo toho radši použili první centrální diferenci s chybou $\mathcal{O}(h^2)$? Jelikož chceme mít v numerickém vzorci jen hodnoty vztažené k $x^{(k)}$ a $x^{(k+1)}$, vyjádříme rovnici uprostřed mezi body $x^{(k)}$ a $x^{(k+1)}$ a použijeme pro centrální diferenci poloviční krok:

$$\begin{aligned}
y'\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right) &= f\left(x^{(k)} + \frac{h}{2},\ y\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right)\right)\\
\frac{y(x^{(k+1)}) - y(x^{(k)})}{h} + \mathcal{O}(h^2) &= f\left(x^{(k)} + \frac{h}{2},\ y\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right)\right)\\
y(x^{(k+1)}) &= y(x^{(k)}) + h\ f\left(x^{(k)} + \frac{h}{2},\ y\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right)\right) + \mathcal{O}(h^3)
\end{aligned}$$

Na pravé straně rovnice je neznámá hodnota $y\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right)$, kterou aproximujeme explicitní Eulerovou metodou s polovičním krokem: $y\left(x^{(k)} + \frac{h}{2}\right) \approx y^{(k)} + \frac{h}{2} f(x^{(k)}, y^{(k)})$. Výsledek je

Collatzova methoda pro rovnici (1):

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + h\ f\left(x^{(k)} + \frac{h}{2},\ y^{(k)} + \frac{h}{2} f(x^{(k)}, y^{(k)})\right)\,.$$

Collatzova metoda je 2. řádu (o řád lepší než Eulerova).

Collatzova metoda pro soustavu rovnic:

zvolíme krok h a pro $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. spočítáme pomocný bod $[x_p, \mathbf{Y}_p]$ Eulerovou metodou s polovičním krokem:
   $\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(x^{(i)},\ \mathbf{Y}^{(i)})$
   $x_p = x^{(i)} + \frac{1}{2}h$
   $\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}^{(i)} + \frac{1}{2}h\,\mathbf{K}_1$
2. v pomocném bodě $[x_p, \mathbf{Y}_p]$ spočítáme derivaci $\mathbf{K}_2$ jako
   $\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(x_p,\ \mathbf{Y}_p)$
3. a položíme
   $x^{(i+1)} = x^{(i)} + h$
   $\mathbf{Y}^{(i+1)} = \mathbf{Y}^{(i)} + h\,\mathbf{K}_2$

Příklad 1 - pokračování z minulého cvičení. Je dána úloha

$$y' = \frac{y}{x^2}\,, \quad y(1) = 2\ .$$

Určete přibližnou hodnotu $y(1.4)$ pomocí Collatzovy metody s délkou kroku $h = 0.2$ a porovnejte výsledek s Eulerovou metodou.

Řešení:

Výsledky jsou uvedeny v Tab. 1. Je vidět, že Collatzovou metodou vyšly přesnější výsledky i než Eulerovou (explicitní i implicitní) s krokem $h = 0.1$, přestože jsme pro Collatzovu metodu použili krok $h = 0.2$, což představuje srovnatelnou pracnost). Výpočet:

$h = 0.2, \quad x^{(0)} = 1, \quad y^{(0)} = 2$

$k_1 \equiv f(x^{(0)}, y^{(0)}) = \dfrac{y^{(0)}}{(x^{(0)})^2} = \dfrac{2}{1^2} = 2,$

$x_p = x^{(0)} + \frac{1}{2}h = 1 + 0.1 = 1.1, \qquad y_p = y^{(0)} + \frac{1}{2}h\,k_1 = 2 + 0.1 \cdot 2 = 2.2$

$k_2 \equiv f(x_p, y_p) = \dfrac{y_p}{x_p^2} = \dfrac{2.2}{1.1^2} = 1.8182$

$x^{(1)} = x^{(0)} + h = 1 + 0.2 = 1.2, \quad y^{(1)} = y^{(0)} + h\,k_2 = 2 + 0.2 \cdot 1.8182 = 2.3636$

$k_1 \equiv f(x^{(1)}, y^{(1)}) = \dfrac{y^{(1)}}{(x^{(1)})^2} = \dfrac{2.3636}{1.2^2} = 1.6414$

$x_p = x^{(1)} + \frac{1}{2}h = 1.2 + 0.1 = 1.3$

$y_p = y^{(1)} + \frac{1}{2}h\,k_1 = 2.3636 + 0.1 \cdot 1.6414 = 2.5278$

$k_2 \equiv f(x_p, y_p) = \dfrac{y_p}{x_p^2} = \dfrac{2.5278}{1.3^2} = 1.4957$

$x^{(2)} = x^{(1)} + h = 1.2 + 0.2 = 1.4$

$y^{(2)} = y^{(1)} + h\,k_2 = 2.3636 + 0.2 \cdot 1.4957 = 2.6628$

$y(1.4)$ is approximately equal to $y^{(2)} = 2.6628$.

$x^{(i)}$	exact $y(x^{(i)})$	Euler $h=0.1$ Explic.	Euler $h=0.1$ Implic.	Euler $h=0.2$ Explic.	Euler $h=0.2$ Implic.	Collatz $h = 0.2$
1	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
1.1	2.1903	2.2000	2.1802			(2.2000)
1.2	2.3627	2.3818	2.3429	2.4000	2.3226	2.3636
1.3	2.5191	2.5472	2.4902			(2.5278)
1.4	2.6614	2.6979	2.6241	2.7333	2.5865	2.6628
1.5	2.7912	2.8356	2.7462			(2.7986)
1.6	2.9100	2.9616	2.8578	3.0122	2.8057	2.9115
1.7	3.0190	3.0773	2.9602			(3.0253)
1.8	3.1192	3.1838	3.0545	3.2476	2.9903	3.1209
1.9	3.2118	3.2821	3.1415			(3.2172)
2.0	3.2974	3.3730	3.2221	3.4480	3.1477	3.2992

Tabulka 1. V prvním sloupci tabulky jsou hodnoty x, ve kterých počítáme přibližné řešení. Ve 2. sloupci je přesné řešení, ve 3. a 4. sloupci je přibližné řešení počítané Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$ a $h = 0.2$ a v posledním sloupci je řešení počítané Collatzovou metodou s krokem $h = 0.2$.

Příklad 2 - z minulého cvičení, řešený Collatzovou metodou

Je dána úloha

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1 \sin(x) + y_3 \\ y_2 \ln(x+1) - 4 \\ 2y_1 \; - \; \dfrac{y_3}{x-2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zvolte krok $h = 0.2$ a spočítejte přibližnou hodnotu $\mathbf{Y}(1.2)$ Collatzovou metodou.

Řešení

$x^{(0)} = 1$, $\mathbf{Y}^{(0)} = (-1, 1, 2)^T$, $h = 0.2$:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(x^{(0)}, \mathbf{Y}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \cdot \sin(1) + 2 \\ 1 \cdot \ln(1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-1) \; - \; \dfrac{2}{1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.84147 + 2 \\ 0.69315 - 4 \\ -2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_p = x^{(0)} + \tfrac{1}{2}\, h = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}^{(0)} + \frac{1}{2}\, h\, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1.1585 \\ -3.3068 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8842 \\ 0.6693 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(x_p, \mathbf{Y}_p) = \begin{bmatrix} -0.8842 \cdot \sin(1.1) + 2 \\ 0.6693 \cdot \ln(1.1+1) - 4 \\ 2 \cdot (-0.8842) \; - \; \dfrac{2}{1.1-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7880 + 2 \\ 0.6693 \cdot 0.74194 - 4 \\ -1.7684 + 2.2222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.45380 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(0)} + h\, \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 1.2120 \\ -3.5034 \\ 0.4538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7576 \\ 0.2993 \\ 2.091 \end{bmatrix}$$

Hodnota $\mathbf{Y}(1.2)$ se přibližně rovná $\mathbf{Y}^{(1)} = (-0.7782,\; 0.2993,\; 2.091)^T$.