Parciální diferenciální rovnice

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Lineární PDR 2. řádu ve 2 proměnných

Hledáme funkci $u \equiv u(x,y)$, která na dané oblasti Ω vyhovuje rovnici

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + hu = f$$

kde $a(x,y), b(x,y), \dots h(x,y)$ a $f(x,y)$ jsou funkce spojité na Ω.

Klasifikace lin. PDR 2. řádu

Položme $r(x,y) = (b(x,y))^2 - 4\,a(x,y)\,c(x,y)$.
Podle znamínka funkce $r(x,y)$ potom rozlišujeme rovnice na

- eliptické $\dots r(x,y) < 0$ (např. Poissonova rovnice)
- parabolické $\dots r(x,y) = 0$ (např. rovnice vedení tepla)
- hyperbolické $\dots r(x,y) > 0$ (např. rovnice vlny)

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici - metoda sítí

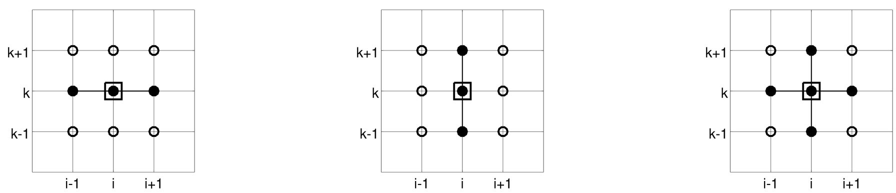
Hledáme funkci $u \equiv u(x,y)$, která vyhovuje rovnici

$$-\Delta u \;=\; f(x,y)\,, \qquad \text{kde} \quad \Delta u \;\equiv\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,$$

na dané oblasti Ω a má předepsané hodnoty $u(x,y) = \phi(x,y)$ na její hranici Γ.

- Zvolíme krok h (tj. velikost ok sítě) a oblast Ω pokryjeme čtvercovou sítí tak, aby žádná hrana sítě neprotínala hranici Γ (v úlohách úrovně B to obvykle jde; jinak musíme použít lineární interpolaci).
- Uzly sítě uvnitř Ω označíme jako $P_i = [x_i, y_i]\,,\ i = 1, \dots n$. Přibližnou hodnotu řešení v uzlu P_i označíme jako U_i, tj. $U_i \approx u(x_i, y_i)$.
- V každém uzlu sítě P_i uvnitř Ω sestavíme jednu rovnici svazující dohromady přibližnou hodnotu U_i v tomto uzlu s hodnotami U_H, U_D, U_L a U_P v sousedních uzlech P_H, P_D, P_L a P_P (horní, dolní, levý a pravý soused):
  $4U_i - U_H - U_D - U_L - U_P = h^2\, f(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, \dots n$

  Pokud některý ze sousedních uzlů leží na hranici Γ, dosadíme do rovnice odpovídající předepsanou hodnotu a převedeme na pravou stranu rovnice.
- Řešením výsledné soustavy n rovnic pro n neznámých $U_1, \dots U_n$ získáme přibližné hodnoty řešení ve vnitřních uzlech sítě.



Obr. 1: Uzly sítě, v nichž se berou hodnoty pro centrální diference v bodě P_i^k. Vlevo: 2. centrální diference vzhledem k x. Uprostřed: 2. centrální diference vzhledem k y. Vpravo: pětibodové schéma (stencil) pro Δu.

Příklad 1

Je dána rovnice

$$x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 0.25\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + 2y$$

Zjistěte, jakého typu tato rovnice je.

Řešení

Zajímá nás znaménko funkce
$r(x,y) = (b(x,y))^2 - 4\,a(x,y)\,c(x,y) = (-xy)^2 - 4\,x^2y^2 \cdot 0.25 = 0.$
Funkce $r(x,y)$ je pro všechna x, y nulová, takže daná rovnice je parabolická (na libovolné oblasti).

Příklad 2

Je dána Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

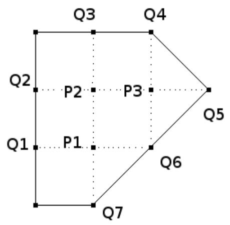
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y - x \quad \text{na } \Omega\,, \quad u(x,y) = y \;\; \text{na } \Gamma$$

kde Ω je pětiúhelník s vrcholy $[\,-1,\,0\,]$, $[\,-1,\,1.5\,]$, $[\,0,\,1.5\,]$, $[\,0.5,\,1\,]$ a $[\,-0.5,\,0\,]$.

Zvolte krok sítě $h = 0.5$ a vypočítejte řešení v bodě $[\,-0.5,\,1\,]$ metodou sítí.

Řešení

Abychom vypočítali přibližnou hodnotu řešení v některém bodě, musíme vypočítat hodnoty ve všech vnitřních uzlech oblasti. Nejdřív nakreslíme obrázek a označíme uzly, které budeme potřebovat:



Obr. 2: Daná oblast s vyznačenými vnitřními (P_i) a hraničními (Q_j) uzly.

Máme tři vnitřní uzly $P_1 = [\,-0.5,\,0.5\,]$, $P_2 = [\,-0.5,\,1\,]$ a $P_3 = [\,0,\,1\,]$ a celkem 9 uzlů na hranici, z nichž budeme potřebovat jen sedm označených jako Q_j. Chceme vypočítat přibližné hodnoty U_1, U_2 a U_3 řešení v uzlech P_i. Hodnoty v uzlech Q_j si předem spočítáme z okrajové podmínky:

$u(Q_1) = u(\,-1\,,\;0.5) = 0.5$
$u(Q_2) = u(\,-1\,,\;1) = 1$
$u(Q_3) = u(\,-0.5\,,\;1.5) = 1.5$
$u(Q_4) = u(\,0\,,\;1.5) = 1.5$
$u(Q_5) = u(\,0.5\,,\;1) = 1$
$u(Q_6) = u(\,0\,,\;0.5) = 0.5$
$u(Q_7) = u(\,-0.5\,,\;0) = 0$

Dále si připravíme hodnoty $f(P_i)$:

$f(P_1) = y_1 - x_1 = 0.5 - (-0.5) = 1$
$f(P_2) = y_2 - x_2 = 1 - (-0.5) = 1.5$

$f(P_3) = y_3 - x_3 = 1 - 0 = 1$

Nyní v každém uzlu P_i sestavíme jednu rovnici (a postupně ji upravíme):

P_1:

$4U_1 - U_2 - u(Q_1) - u(Q_6) - u(Q_7) = -h^2 f(P_1)$
$4U_1 - U_2 = -h^2 f(P_1) + u(Q_1) + u(Q_6) + u(Q_7)$
$4U_1 - U_2 = -0.25 \cdot 1 + 0.5 + 0.5 + 0 = 0.75$
$4U_1 - U_2 = 0.75$

P_2:

$4U_2 - U_1 - U_3 - u(Q_2) - u(Q_3) = -h^2 f(P_2)$
$4U_2 - U_1 - U_3 = -h^2 f(P_2) + u(Q_2) + u(Q_3)$
$4U_2 - U_1 - U_3 = -0.25 \cdot 1.5 + 1 + 1.5 = 2.125$
$4U_2 - U_1 - U_3 = 2.125$

P_3:

$4U_3 - U_2 - u(Q_4) - u(Q_5) - u(Q_6) = -h^2 f(P_3)$
$4U_3 - U_2 = -h^2 f(P_3) + u(Q_4) + u(Q_5) + u(Q_6)$
$4U_3 - U_2 = -0.25 \cdot 1 + 1.5 + 1 + 0.5 = 2.75$
$4U_3 - U_2 = 2.75$

Výsledná soustava rovnic tedy je

$$\begin{aligned} 4U_1 - U_2 \quad\quad &= 0.75 \\ 4U_2 - U_1 - U_3 &= 2.125 \\ 4U_3 - U_2 \quad\quad &= 2.75 \end{aligned}$$

V maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 2.125 \\ 2.75 \end{bmatrix}$$

Řešení: $U_1 = 0.4018,\ U_2 = 0.8571,\ U_3 = 0.9018$.

Přibližné řešení v bodě $P_2 = [\,-0.5,\ 1\,]$ je $U_2 = 0.8571$.

Příklad 3

Uvažujme stejnou úlohu jako v Př. 2, jen s malou změnou tvaru oblasti Ω: posuneme její poslední vrchol trochu vpravo, takže oblast je nyní dána vrcholy $[\,-1,\ 0\,]$, $[\,-1,\ 1.5\,]$, $[\,0,\ 1.5\,]$, $[\,0.5,\ 1\,]$ a $[\,-\mathbf{0.3},\ \mathbf{0}\,]$.

Řešení

Nyní máme čtyři vnitřní uzly: *regulární* uzly P_1, P_2, P_3 (regulární uzel nemá žádného souseda vně $\bar{\Omega}$) a nový uzel $P_4 = [\,0,\ 0.5\,]$, který byl původně hraničním uzlem Q_6 . Uzel P_4 je *neregulární*, protože jeho pravý sousední uzel v síti už leží vně $\bar{\Omega}$, tj. vně oblasti Ω včetně její hranice (načrtněte si obrázek).

Pro regulární uzly sestavíme rovnice stejně jako předtím, jen s drobnou změnou: místo hodnoty $u(Q_6)$ zadané na hranici oblasti máme nyní novou neznámou U_4:

P_1:

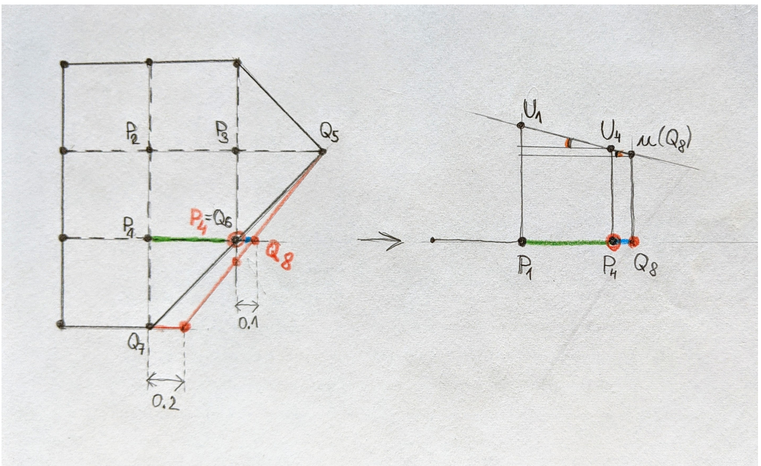
$4U_1 - U_2 - U_4 - u(Q_1) - u(Q_7) = -h^2 f(P_1)$
$4U_1 - U_2 - U_4 = -h^2 f(P_1) + u(Q_1) + u(Q_7)$
$4U_1 - U_2 - U_4 = -0.25 \cdot 1 + 0.5 + 0 = 0.25$
$4U_1 - U_2 - U_4 = 0.25$

P_2:

$4U_2 - U_1 - U_3 - u(Q_2) - u(Q_3) = -h^2 f(P_2)$
$\dots$
$4U_2 - U_1 - U_3 = 2.125$

P_3:

$4U_3 - U_2 - U_4 - u(Q_4) - u(Q_5) = -h^2 f(P_3)$
$4U_3 - U_2 - U_4 = -h^2 f(P_3) + u(Q_4) + u(Q_5)$
$4U_3 - U_2 - U_4 = -0.25 \cdot 1 + 1.5 + 1 = 2.25$
$4U_3 - U_2 - U_4 = 2.25$



Obr. 3: Lineární interpolace.

Čtvrtou rovnici (pro uzel P_4) získáme lineární interpolací z hodnot v P_1 a v pomocném bodě Q_8 – průsečíku přímky P_1P_4 a hranice oblasti. Využitím podobnosti trojúhelníků určíme $Q_8 = [\ 0.1,\, 0.5\ ]$ a spočeteme hodnotu na hranici jako $u(Q_8) = u(\ 0.1\ ,\ 0.5) = 0.5$. Lineární interpolací dostaneme:

$(U_4 - U_1)/h \quad = (u(Q_8) - U_1)/(h + dist(P_4, Q_8))$
$(U_4 - U_1)/0.5 \ = (0.5 - U_1)/0.6$
$0.6\,U_4 - 0.1\,U_1 = 0.25$

Maticový zápis těchto rovnic je

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 2.125 \\ 2.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

a řešení $U_1 = 0.3969,\ U_2 = 0.8547,\ U_3 = 0.8969,\ U_4 = 0.4828$.