Parciální diferenciální rovnice

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Smíšená úloha pro rovnici vedení tepla – metoda sítí

Hledáme funkci $u \equiv u(x,t)$, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{na dané oblasti } \Omega = (a,b) \times (0,T)$$

má předepsanou počáteční podmínku v čase $t = 0$

$u(x,0) = \phi(x)$ pro $x \in \langle a,b \rangle$

a splňuje okrajové podmínky pro $t > 0$

$u(a,t) = \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t)$

Počáteční a okrajové podmínky musí být navzájem kompatibilní, tj. musí splňovat tzv. *podmínky souhlasu*:

$\phi(a) = \alpha(0)\ , \quad \phi(b) = \beta(0)$

Metoda sítí

- Zvolíme krok h ve směru x a krok τ ve směru t a oblast Ω pokryjeme sítí, která má uzly $P_i^k = [x_i, t_k]$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + h$, $0 = t_0 < t_1 < \dots,\quad t_{k+1} = t_k + \tau$. Přibližnou hodnotu řešení v uzlu P_i^k označíme jako U_i^k, tj. $U_i^k \approx u(x_i, t_k)$.
- Hodnoty ve výchozí časové vrstvě jsou dány počáteční podmínkou, hodnoty na levé a pravé hranici jsou dány okrajovými podmínkami.
- **Explicitní schéma**: V každém vnitřním uzlu sítě P_i^{k+1} vypočítáme přibližnou hodnotu U_i^{k+1} ze známých hodnot v předcházející časové vrstvě jako:

  $$U_i^{k+1} = (1-2\sigma)\,U_i^k + \sigma(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) + \tau\, f(x_i, t_k), \quad \text{kde } \sigma = \frac{p\,\tau}{h^2}$$

  Pokud některý z uzlů leží na hranici, dosadíme do rovnice odpovídající předepsanou okrajovou (resp. počáteční) podmínku.

  Podmínka stability explicitní metody: $\sigma \leq 0.5$.
- **Implicitní schéma**: Hodnoty U_i^{k+1} ve vnitřních uzlech $(k+1)$-ní časové vrstvy vypočítáme z již známých hodnot U_j^k v předchozí časové vrstvě řešením soustavy lineárních rovnic

  $$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1+2\sigma)\,U_i^{k+1} - \sigma U_{i+1}^{k+1} = U_i^k + \tau\, f(x_i, t_{k+1})\ .$$

  Implicitní schéma je nepodmíněně stabilní.

© Certik

Příklad 1

Vyřešte úlohu vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \quad \text{na oblasti } \Omega = (0,1)\times(0,0.4)$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$

a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ pro $t > 0$.

a) Ověřte podmínky souhlasu.

b) Zvolte prostorový krok $h = 0.25$ a časový krok co největší, aby explicitní metoda byla stabilní. Úlohu řešte explicitní metodou.

c) Zvolte stejný prostorový krok $h = 0.25$ a časový krok dvakrát větší než v bodě b), řešte úlohu implicitní metodou.

Řešení

a) $u(x,0) = \phi(x) = x^2$, $u(0,t) = \alpha(t) = 0$, $u(1,t) = \beta(t) = 1$

podmínky souhlasu: $\phi(a) = \alpha(0)$, $\phi(b) = \beta(0)$, kde $a = 0,\ b = 1$

$\phi(0) = 0^2 = 0$, $\alpha(0) = 0$ – v bodě $[0,0]$ je poč. i okrajová podmínka rovna 0.

$\phi(1) = 1^2 = 1$, $\beta(0) = 1$ – v bodě $[1,0]$ je poč. i okrajová podmínka rovna 1.

Počáteční i okrajové podmínky jsou tedy v souladu.

b) Najdeme maximální časový krok τ takový, aby explicitní metoda byla stabilní, tj. $\sigma \le 0.5$:

$$\sigma = \frac{p\,\tau}{h^2} \le 0.5 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \le 0.5\,\frac{h^2}{p} = 0.5\,\frac{0.25^2}{0.3} = 0.10417$$

Jelikož chceme úlohu řešit v časovém intervalu $\langle 0, 0.4\rangle$, zvolíme krok tak, aby koncový čas byl jeho celým násobkem, tj. položíme $\tau = 0.1$, pak bude

$$\sigma = \frac{0.3\cdot 0.1}{0.25^2} = 0.48 \ .$$

Připravíme si tabulku, kam si budeme postupně po řádcích zdola nahoru zapisovat řešení tak, jak ho budeme postupně počítat po jednotlivých časových vrstvách. Schéma tabulky:

t_4	0.4	U_0^4	U_1^4	U_2^4	U_3^4	U_4^4
t_3	0.3	U_0^3	U_1^3	U_2^3	U_3^3	U_4^3
t_2	0.2	U_0^2	U_1^2	U_2^2	U_3^2	U_4^2
t_1	0.1	U_0^1	U_1^1	U_2^1	U_3^1	U_4^1
t_0	0.0	U_0^0	U_1^0	U_2^0	U_3^0	U_4^0
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

V prvním sloupci tabulky jsou hodnoty t, ve spodním řádku jsou x-ové souřadnice uzlů. Do řádku pro $t = 0$ doplníme odpovídající hodnoty počáteční podmínky (modře), do 2. a do posledního sloupce dopočítáme hodnoty z okrajových podmínek (červeně). V rozích splývá hodnota pro počáteční i okrajovou podmínku (fialově). Uvnitř jsou hodnoty řešení, které budeme počítat (černě).

Takže na začátku, po doplnění počáteční podmínky $u(x,0) = x^2$ a okrajových podmínek $u(0,t) = 0$ a $u(1,t) = 1$, bude tabulka vypadat takhle:

© Certik

t_4	0.4	0.0000				1.0000
t_3	0.3	0.0000				1.0000
t_2	0.2	0.0000				1.0000
t_1	0.1	0.0000				1.0000
t_0	0.0	0.0000	0.0625	0.2500	0.5625	1.0000
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

Nyní postupně dopočítáme hodnoty v jednotlivých časových vrstvách, vždycky přitom použijeme hodnoty z předchozího řádku:

První vrstva ($t_1 = 0.1$):

$$U_1^1 = (1-2\sigma)\,U_1^0 + \sigma(U_0^0 + U_2^0) + \tau\, f(x_1, t_0) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.0625 + 0.48(0 + 0.25) + 0.1\cdot 0.25 = 0.1475$$

$$U_2^1 = (1-2\sigma)\,U_2^0 + \sigma(U_1^0 + U_3^0) + \tau\, f(x_2, t_0) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.25 + 0.48(0.0625 + 0.5625) + 0.1\cdot 0.50 = 0.36$$

$$U_3^1 = (1-2\sigma)\,U_3^0 + \sigma(U_2^0 + U_4^0) + \tau\, f(x_3, t_0) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.5625 + 0.48(0.25 + 1) + 0.1\cdot 0.75 = 0.6975$$

Druhá vrstva ($t_2 = 0.2$):

$$U_1^2 = (1-2\sigma)\,U_1^1 + \sigma(U_0^1 + U_2^1) + \tau\, f(x_1, t_1) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.1475 + 0.48(0 + 0.36) + 0.1\cdot 0.25 = 0.2037$$

$$U_2^2 = (1-2\sigma)\,U_2^1 + \sigma(U_1^1 + U_3^1) + \tau\, f(x_2, t_1) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.36 + 0.48(0.1475 + 0.6975) + 0.1\cdot 0.50 = 0.47$$

$$U_3^2 = (1-2\sigma)\,U_3^1 + \sigma(U_2^1 + U_4^1) + \tau\, f(x_3, t_1) = \\ = (1 - 2\cdot 0.48)\cdot 0.6975 + 0.48(0.36 + 1) + 0.1\cdot 0.75 = 0.7557$$

Třetí a čtvrtou vrstvu ($t = 0.3$ a $t = 0.4$) spočteme analogicky.
Výsledná tabulka s přibližnými hodnotami řešení ve vnitřních uzlech:

t_4	0.4	0.0000	0.2894	0.5846	0.8415	1.0000
t_3	0.3	0.0000	0.2587	0.5293	0.8108	1.0000
t_2	0.2	0.0000	0.2037	0.4700	0.7557	1.0000
t_1	0.1	0.0000	0.1475	0.3600	0.6975	1.0000
t_0	0.0	0.0000	0.0625	0.2500	0.5625	1.0000
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

c) Pro $\tau = 0.2$, $h = 0.25$ vychází $\sigma = \dfrac{0.3\cdot 0.2}{0.25^2} = 0.96$. Maticově můžeme zapsat implicitní metodu jako

$$\begin{bmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma \\ 0 & -\sigma & 1+2\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(k+1)} \\ U_2^{(k+1)} \\ U_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma U_0^{(k+1)} + U_1^{(k)} + \tau\, f(x_1, t_{k+1}) \\ U_2^{(k)} + \tau\, f(x_2, t_{k+1}) \\ \sigma U_4^{(k+1)} + U_3^{(k)} + \tau\, f(x_3, t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

První časová vrstva ($t_1 = 0.2$):

$$\begin{bmatrix} 2.92 & -0.96 & 0 \\ -0.96 & 2.92 & -0.96 \\ 0 & -0.96 & 2.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0.0625 + 0.2\cdot 0.25 \\ 0.2500 + 0.2\cdot 0.50 \\ 0.96 + 0.5625 + 0.2\cdot 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1125 \\ 0.3500 \\ 1.6725 \end{bmatrix}$$

$U^{(1)} = [\,0.1731,\ 0.4093,\ 0.7074]^T$.

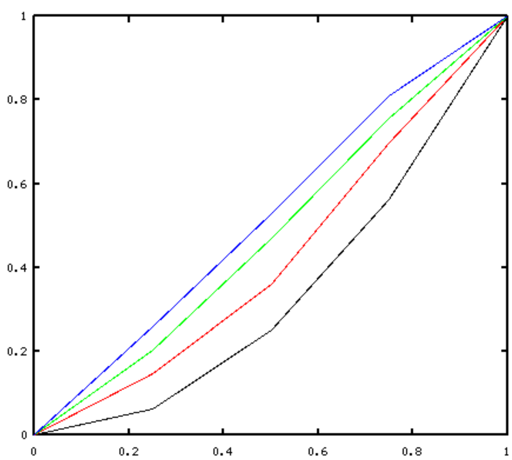
© Certik

Druhá časová vrstva ($t_2 = 0.4$):

$$\begin{bmatrix} 2.92 & -0.96 & 0 \\ -0.96 & 2.92 & -0.96 \\ 0 & -0.96 & 2.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0.1731 + 0.2 \cdot 0.25 \\ 0.4093 + 0.2 \cdot 0.50 \\ 0.96 + 0.7074 + 0.2 \cdot 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2231 \\ 0.5093 \\ 1.8174 \end{bmatrix}$$

$U^{(2)} = [\ 0.2459,\ 0.5156,\ 0.7919]^T$.

V případě implicitní metody dvojnásobný krok nezpůsobí nestabilitu metody, i když chyba bude pravděpodobně zhruba dvojnásobná ve srovnání s volbou a).



Obr. 1: **Příklad 1:** Grafy řešení explicitní metodou, v časech 0 až 0.3 – postupně černá, červená, zelená, modrá. Vodorovná osa je x, svislá $u(x,t)$.

© Certik

Příklad 2

Vyřešte úlohu vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + x \quad \text{na oblasti } \Omega = (0,1) \times (0,T)$$

s počáteční podmínkou $\quad u(x,0) = 0 \;$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$

a okrajovými podmínkami $\quad u(0,t) = 0\ ,\ \ u(1,t) = 3t$ pro $t > 0$.

Zvolte prostorový krok $h = 0.25$ a časový krok $\tau = 0.1$. Ověřte, že explicitní metoda bude stabilní, a spočtěte přibližnou hodnotu $u(0.75, 0.4)$.

Řešení

$$\sigma = \frac{p\,\tau}{h^2} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.25^2} = 0.32 \leq 0.5$$

Pro zvolenou kombinaci prostorového a časového kroku bude explicitní metoda stabilní.

Připravíme si tabulku, kam si budeme postupně po řádcích zdola nahoru zapisovat řešení tak, jak ho budeme postupně počítat po jednotlivých časových vrstvách. Pro určení přibližné hodnoty $u(0.75, 0.4) \approx U_3^4$ explicitní metodou nemusíme počítat přibližné řešení v celém obdélníku, stačí nám "pyramida" vyznačená v tabulce:

t_4	0.4				U_3^4	
t_3	0.3			U_2^3	U_3^3	U_4^3
t_2	0.2		U_1^2	U_2^2	U_3^2	U_4^2
t_1	0.1	U_0^1	U_1^1	U_2^1	U_3^1	U_4^1
t_0	0.0	U_0^0	U_1^0	U_2^0	U_3^0	U_4^0
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

Po doplnění počáteční podmínky $u(x,0) = 0$ a okrajových podmínek $u(0,t) = 0$ a $u(1,t) = 3t$, bude tabulka vypadat takto:

t_4	0.4					
t_3	0.3					0.9000
t_2	0.2					0.6000
t_1	0.1	0.0000				0.3000
t_0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

Nyní postupně dopočítáme hodnoty v jednotlivých řádcích:

První vrstva ($t_1 = 0.1$):

$$U_1^1 = (1-2\sigma)\,U_1^0 + \sigma(U_0^0 + U_2^0) + \tau\, f(x_1, t_0) =$$
$$= (1 - 2\cdot 0.32)\cdot 0 + 0.32(0+0) + 0.1(2\cdot 0 + 0.25) = 0.025$$

$$U_2^1 = (1-2\sigma)\,U_2^0 + \sigma(U_1^0 + U_3^0) + \tau\, f(x_2, t_0) =$$
$$= 0.36\cdot 0 + 0.32(0+0) + 0.1(2\cdot 0 + 0.5) = 0.05$$

$$U_3^1 = (1-2\sigma)\,U_3^0 + \sigma(U_2^0 + U_4^0) + \tau\, f(x_3, t_0) =$$
$$= 0.36\cdot 0 + 0.32(0+0) + 0.1(2\cdot 0 + 0.75) = 0.075$$

Druhá vrstva ($t_2 = 0.2$):

$$U_1^2 = (1-2\sigma)\,U_1^1 + \sigma(U_0^1 + U_2^1) + \tau\, f(x_1, t_1) =$$
$$= 0.36\cdot 0.025 + 0.32(0 + 0.05) + 0.1(2\cdot 0.1 + 0.25) = 0.07$$

© Certik

$$U_2^2 = (1-2\sigma)\,U_2^1 + \sigma(U_1^1 + U_3^1) + \tau\, f(x_2, t_1) =$$
$$= 0.36 \cdot 0.05 + 0.32(0.025 + 0.075) + 0.1(2 \cdot 0.1 + 0.5) = 0.12$$

$$U_3^2 = (1-2\sigma)\,U_3^1 + \sigma(U_2^1 + U_4^1) + \tau\, f(x_3, t_1) =$$
$$= 0.36 \cdot 0.075 + 0.32(0.05 + 0.3) + 0.1(2 \cdot 0.1 + 0.75) = 0.234$$

Třetí vrstva ($t_3 = 0.3$):

$$U_2^3 = (1-2\sigma)\,U_2^2 + \sigma(U_1^2 + U_3^2) + \tau\, f(x_2, t_2) =$$
$$= 0.36 \cdot 0.12 + 0.32(0.07 + 0.234) + 0.1(2 \cdot 0.2 + 0.5) = 0.2305$$

$$U_3^3 = (1-2\sigma)\,U_3^2 + \sigma(U_2^2 + U_4^2) + \tau\, f(x_3, t_2) =$$
$$= 0.36 \cdot 0.234 + 0.32(0.12 + 0.6) + 0.1(2 \cdot 0.2 + 0.75) = 0.4296$$

Čtvrtá vrstva ($t_4 = 0.4$):

$$U_3^4 = (1-2\sigma)\,U_3^3 + \sigma(U_2^3 + U_4^3) + \tau\, f(x_3, t_3) =$$
$$= 0.36 \cdot 0.4296 + 0.32(0.2305 + 0.9) + 0.1(2 \cdot 0.3 + 0.75) = 0.6514$$

Výsledná tabulka s přibližnými hodnotami řešení:

t_4	0.4				0.6514	
t_3	0.3			0.2305	0.4296	0.9000
t_2	0.2		0.0700	0.1200	0.2340	0.6000
t_1	0.1	0.0000	0.0250	0.0500	0.0750	0.3000
t_0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
		0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4

Přibližná hodnota $u(0.75, 0.4)$ je 0.6514 .

© Certik