Parciální diferenciální rovnice

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Smíšená úloha pro rovnici vlny - metoda sítí

Hledáme funkci $u \equiv u(x,t)$, která vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{na dané oblasti } \Omega = (a,b)\times(0,T)$$

má předepsané počáteční podmínky v čase $t=0$

$$u(x,0) = \phi(x) \quad \text{pro } x \in \langle a,b\rangle$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \quad \text{pro } x \in \langle a,b\rangle$$

a splňuje okrajové podmínky pro $t>0$

$$u(a,t) = \alpha(t)\ , \qquad u(b,t) = \beta(t)$$

Kladná konstanta c představuje rychlost vlny.

Počáteční a okrajové podmínky musí být navzájem kompatibilní, tj. musí splňovat tzv. *podmínky souhlasu*:

$$\phi(a) = \alpha(0)\ , \quad \phi(b) = \beta(0)\ , \quad \psi(a) = \alpha'(0)\ , \quad \psi(b) = \beta'(0)$$

Metoda sítí

- Zvolíme krok h ve směru x a krok τ ve směru t a oblast Ω pokryjeme sítí, která má uzly $P_i^k = [x_i, t_k]$, kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + h$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots$, $t_{k+1} = t_k + \tau$. Přibližnou hodnotu řešení v uzlu P_i^k označíme jako U_i^k, tj. $U_i^k \approx u(x_i, t_k)$.
  Označíme $\sigma = \dfrac{c\,\tau}{h}$.
- Hodnoty na levé a pravé hranici jsou dány okrajovými podmínkami, hodnoty ve výchozí časové vrstvě jsou dány počáteční podmínkou $\phi(x)$ a hodnoty v první časové vrstvě se extrapolují z výchozí časové vrstvy jako
  $$U_i^1 = \phi(x_i) + \tau\psi(x_i)$$
- **Explicitní schéma**: V každém vnitřním uzlu P_i^{k+1} druhé a dalších časových vrstev vypočítáme přibližnou hodnotu U_i^{k+1} ze známých hodnot v předcházejících dvou časových vrstvách jako:
  $$U_i^{k+1} = 2(1-\sigma^2)\,U_i^k + \sigma^2(U_{i-1}^k + U_{i+1}^k) - U_i^{k-1} + \tau^2 f(x_i,t_k)\ .$$
  Podmínka stability: $\sigma \le 1$.
- **Implicitní schéma**: Hodnoty U_i^{k+1} ve vnitřních uzlech $(k+1)$-ní časové vrstvy vypočítáme z již známých hodnot U_j^k, U_j^{k-1} v předchozích dvou časových vrstvách řešením soustavy lineárních rovnic
  $$-\sigma^2 U_{i-1}^{k+1} + 2(1+\sigma^2)\,U_i^{k+1} - \sigma^2 U_{i+1}^{k+1} =$$
  $$= \sigma^2 U_{i-1}^{k-1} - 2(1+\sigma^2)\,U_i^{k-1} + \sigma^2 U_{i+1}^{k-1} + 4U_i^k + 2\tau^2 f(x_i,t_k)\ .$$
  Implicitní schéma je nepodmíněně stabilní.

Příklad 1

Je dána rovnice vlny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \qquad\qquad \text{na oblasti } \Omega = (-1,1)\times(0,T)$$

s počátečními podmínkami

$u(x,0) = 2x^2\ ,\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1-x)\,\sin(\dfrac{\pi\,x}{2}) \quad$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$

a okrajovými podmínkami $\quad u(-1,t) = k\,\mathrm{e}^{-t}\ ,\ \ u(1,t) = 2$ pro $t > 0$.

a) Určete hodnotu parametru k, aby byly splněny podmínky souhlasu.

b) Vypočítejte přibližnou hodnotu výchylky v bodě $x = 0.8$ v čase $t = 0.24$ explicitní metodou sítí. Zvolte krok $h = 0.2$ a τ co největší tak, aby metoda byla stabilní.

Řešení

a) $u(x,0) = \phi(x) = 2x^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = (1-x)\,\sin(\dfrac{\pi\,x}{2}),$

$u(-1,t) = \alpha(t) = k\,\mathrm{e}^{-t},\ u(1,t) = \beta(t) = 2$

podmínky souhlasu:

$\phi(a) = \alpha(0)\ , \quad \phi(b) = \beta(0)\ , \quad \psi(a) = \alpha'(0)\ , \quad \psi(b) = \beta'(0)\ , \quad$ kde $a = -1,\ b = 1$

v bodě [-1,0]:

$\phi(-1) = 2\cdot(-1)^2 = 2, \quad \alpha(0) = k\,\mathrm{e}^0 = k,$

$\psi(-1) = (1-(-1))\,\sin(\dfrac{-\pi}{2}) = -2, \quad \alpha'(0) = -k\,\mathrm{e}^0 = -k$

– v bodě $[-1,0]$ počáteční podmínky souhlasí s okrajovou podmínkou pro $k = 2$.

v bodě [1,0]:

$\phi(1) = 2\cdot 1^2 = 2, \quad \beta(0) = 2,$

$\psi(1) = (1-1)\,\sin(\dfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \beta'(0) = 0$

– v bodě $[1,0]$ počáteční podmínky souhlasí s okrajovou podmínkou.

Podmínky souhlasu jsou splněné pro $k = 2$.

b) Časový krok τ musí splňovat podmínku stability $\sigma = \dfrac{c\,\tau}{h} \le 1$, tj.

$\tau \le 1\cdot\dfrac{h}{c} = \dfrac{0.2}{\sqrt{4}} = 0.1$. Zvolíme co největší hodnotu $\tau \le 0.1$, aby bod [0.8, 0.24] byl uzlem sítě: $\tau = 0.08$, takže $\sigma = \dfrac{c\,\tau}{h} = \dfrac{2\cdot 0.08}{0.2} = 0.8$.

Připravíme si tabulku, kam si budeme postupně po řádcích zdola nahoru zapisovat řešení tak, jak ho budeme postupně počítat po jednotlivých časových vrstvách. V tabulce jsou vyznačeny jen hodnoty, které budeme pro výpočet potřebovat. Hlavní rozdíl od řešení rovnice vedení tepla je v tom, že teď musíme z počátečních podmínek vypočítat *dvě* časové vrstvy, nultou (modrá) a první (zelená). Schéma tabulky:

			...					
t_3	0.24		...				U_9^3	
t_2	0.16		...			U_8^2	U_9^2	U_{10}^2
t_1	0.08		...		U_7^1	U_8^1	U_9^1	U_{10}^1
t_0	0.0		...		U_7^0	U_8^0	U_9^0	U_{10}^0
		-1.0	...	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		x_0	...	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

Nejdřív spočítáme z počátečních podmínek nultou a první časovou vrstvu a z okrajové podmínky poslední sloupec:

$$U_7^0 = u(x_7, 0) = 2 \cdot x_7^2 = 2 \cdot 0.4^2 = 0.32$$
$$U_8^0 = u(x_8, 0) = 2 \cdot 0.6^2 = 0.72$$
$$U_9^0 = u(x_9, 0) = 2 \cdot 0.8^2 = 1.28$$

$$U_7^1 = U_7^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_7, 0) = U_7^0 + \tau(1 - x_7)\,\sin(\frac{\pi\, x_7}{2}) =$$
$$= 0.32 + 0.08 \cdot (1 - 0.4)\,\sin(\frac{0.4\,\pi}{2}) = 0.3482$$
$$U_8^1 = U_8^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_8, 0) = 0.72 + 0.08 \cdot (1 - 0.6)\,\sin(\frac{0.6\,\pi}{2}) = 0.7459$$
$$U_9^1 = U_9^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_9, 0) = 1.28 + 0.08 \cdot (1 - 0.8)\,\sin(\frac{0.8\,\pi}{2}) = 1.2952$$

Pak postupně dopočítáme hodnoty v jednotlivých časových vrstvách, vždycky přitom použijeme hodnoty z předchozích dvou řádků:

Druhá vrstva ($t_2 = 0.16$):

$$U_8^2 = 2 \cdot (1 - \sigma^2)\, U_8^1 + \sigma^2 (U_7^1 + U_9^1) - U_8^0 + \tau^2 f(x_8, t_1) =$$
$$= 2 \cdot (1 - 0.64) \cdot 0.7459 + 0.64\,(0.3482 + 1.2952) - 0.72 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.6) =$$
$$= 0.8765$$

$$U_9^2 = 2 \cdot (1 - \sigma^2)\, U_9^1 + \sigma^2 (U_8^1 + U_{10}^1) - U_9^0 + \tau^2 f(x_9, t_1) =$$
$$= 2 \cdot 0.36 \cdot 1.2952 + 0.64\,(0.7459 + 2) - 1.28 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.8) = 1.4202$$

Třetí vrstva ($t_3 = 0.24$):

$$U_9^3 = 2 \cdot (1 - \sigma^2)\, U_9^2 + \sigma^2 (U_8^2 + U_{10}^2) - U_9^1 + \tau^2 f(x_9, t_2) =$$
$$= 2 \cdot 0.36 \cdot 1.4202 + 0.64\,(0.8765 + 2) - 1.2952 + 0.0064 \cdot (2 \cdot 0.8) = 1.5785$$

			...					
t_3	0.24		...				1.5785	
t_2	0.16		...			0.8765	1.4202	2.0000
t_1	0.08		...		0.3482	0.7459	1.2952	2.0000
t_0	0.0		...		0.3200	0.7200	1.2800	2.0000
		-1.0	...	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		x_0	...	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}

Přibližná hodnota výchylky v bodě $x = 0.8$ v čase $t = 0.24$ je $U_9^3 = 1.5785$.