ODR - okrajová úloha

Teorie (velmi stručný výběr z přednášek)

Okrajová úloha 2. řádu

Budeme hledat řešení $y(x)$ okrajové úlohy pro diferenciální rovnici druhého řádu v samoadjungovaném tvaru na intervalu $\langle a, b\rangle$:

$$-(p(x)\,y(x)')' + q(x)\,y(x) = f(x) \quad \text{okr. podm. } y(a) = y_0,\, y(b) = y_n \qquad (1)$$

Existence a jednoznačnost řešení

Postačující podmínky pro existenci právě jednoho řešení úlohy (1) na $\langle a, b\rangle$:

- funkce $p(x)$, $p(x)'$, $q(x)$, $f(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$, a navíc
- $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$

Numerické řešení metodou sítí

Zvolíme krok sítě h, položíme $n = \frac{b-a}{h}$ a uvnitř intervalu $\langle a, b\rangle$ určíme $n-1$ rovnoměrně rozmístěných uzlů: $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = h$ pro všechna $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Označíme přibližnou hodnotu $y(x_i)$ jako y_i. Hodnoty y_0 a y_n máme dané jako okrajové podmínky, ostatní hodnoty y_i pro $i = 1, 2, \ldots n-1$ spočítáme ze soustavy lineárních rovnic

$$-p_{i-\frac{1}{2}}\, y_{i-1} + (p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i + p_{i+\frac{1}{2}})\, y_i - p_{i+\frac{1}{2}}\, y_{i+1} = h^2 f_i$$

kde jsme označili

$$q_i = q(x_i)$$
$$f_i = f(x_i)$$
$$p_{i\pm\frac{1}{2}} = p(x_{i\pm\frac{1}{2}}), \quad x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \tfrac{1}{2}h$$

Pokud $p(x) > 0$ a $q(x) > 0$ na $\langle a, b\rangle$, je matice výsledné soustavy ostře diagonálně dominantní – je tedy regulární a soustavu lze řešit Jacobiovou i Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

Příklad 1 - harmonický oscilátor (tlumené kmity)

Je dána úloha $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ s okrajovými podmínkami $y(0) = 2,\ y(2) = 0$. Najděte numericky přibližné řešení $y(0.2)$ v čase $t = 0.2$.
(Přesné řešení je $y(t) = (2 - 2t + 0.5t^2)\, e^{-t}$.)

Řešení

Začneme převedením dané rovnice na samoadjungovaný tvar (1). Toho lze dosáhnout v následujících čtyřech krocích:

- použijeme vztah pro derivaci součinu funkcí na první člen rovnice (1):

$$-p(x)\, y''(x) \;-\; p'(x)\, y'(x) \;+\; q(x)\, y(x) \;=\; f(x) \tag{2}$$

- násobíme danou rovnici funkcí $-p(x)$ (proměnnou t jsme zde přejmenovali na x):

$$-p(x)\, y''(x) \;-\; 2\, p(x)\, y'(x) \;-\; p(x)\, y(x) \;=\; -p(x)\, e^{-x} \tag{3}$$

- porovnáme koeficienty u odpovídajících derivací y ve (2) a (3):

  $p'(x) = 2\, p(x),\ \ q(x) = -p(x),\ \ f(x) = -p(x)\, e^{-x}$

- z těchto vztahů učíme p, q a f:
  (návod: předpokládejme $p(x) = e^{cx}$, pak $p'(x) = c\, e^{cx} = c\, p(x)$)

  $p(x) = e^{2x},\ \ q(x) = -e^{2x},\ \ f(x) = -e^{2x}\, e^{-x} = -e^{x}$

Samoadjungovaný tvar je $-(e^{2t} y'(t))' - e^{2t} y(t) = -e^{t}$ (můžeme se přesvědčit derivováním prvního členu a dělením celé rovnice $-e^{2t}$, že jsme rovnici nezměnili).

Pro tuto úlohu neplatí výše uvedené postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení, a proto nemáme zaručeno, že při numerickém řešení dostaneme smysluplný výsledek. Přesto si na této názorné úloze numerické řešení vyzkoušíme.

Abychom našli přibližné řešení v daném bodě $t = 0.2$, musíme spočítat přibližné řešení na celém intervalu. Nejdřív rozdělíme interval s krokem $h = 0.2$ a připravíme do tabulky potřebné koeficienty, ze kterých pak budeme sestavovat rovnice:

i	t_i	$p_{i\pm\frac{1}{2}}$	h^2q_i	h^2f_i
	0.1	1.2214		
1	0.2		-0.0597	-0.0489
	0.3	1.8221		
2	0.4		-0.0890	-0.0597
	0.5	2.7183		
3	0.6		-0.1328	-0.0729
	0.7	4.0552		
4	0.8		-0.1981	-0.0890
	0.9	6.0496		
5	1.0		-0.2956	-0.1087
	1.1	9.0250		
6	1.2		-0.4409	-0.1328
	1.3	13.4637		
7	1.4		-0.6578	-0.1622
	1.5	20.0855		
8	1.6		-0.9813	-0.1981
	1.7	29.9641		
9	1.8		-1.4639	-0.2420
	1.9	44.7012		

Tabulka 1: **Příklad 1**. Koeficienty potřebné pro sestavení soustavy rovnic. Koeficienty pro druhou rovnici jsou vyznačeny barevně.

Postup výpočtu koeficientů v Tabulce 1:
z rovnice vidíme, že $p(t) = e^{2t}$, $q(t) = -e^{2t}$ a $f(t) = -e^t$.

$p_{\frac{1}{2}} = p(0.1) = e^{0.2} = 1.2214$
$p_{1\frac{1}{2}} = p(0.3) = e^{0.6} = 1.8221$
...

$h^2q_1 = 0.2^2 \cdot q(0.2) = 0.04 \cdot (-e^{0.4}) = -0.0597$
$h^2q_2 = 0.2^2 \cdot q(0.4) = 0.04 \cdot (-e^{0.8}) = -0.0890$
...

$h^2f_1 = 0.2^2 \cdot f(0.2) = 0.04 \cdot (-e^{0.2}) = -0.0489$
$h^2f_2 = 0.2^2 \cdot f(0.4) = 0.04 \cdot (-e^{0.4}) = -0.0597$
...

Z připravených koeficientů sestavíme 9 rovnic pro 9 neznámých y_1 až y_9 :

první rovnice (pro $i = 1$):

$-1.2214\ y_0 + (1.2214 - 0.0597 + 1.8221)\ y_1 - 1.8221\ y_2 = -0.0489$

dosadíme okrajovou hodnotu $y_0 = 2$ a převedeme na pravou stranu:

$2.9838\ y_1 - 1.8221\ y_2 = -0.0489 + 2 \cdot 1.2214 = 2.3939$

druhá rovnice (pro $i = 2$):

$-1.8221\ y_1 + (1.8221 - 0.0890 + 2.7183)\ y_2 - 2.7183\ y_3 = -0.0597$

$-1.8221\ y_1 + 4.4514\ y_2 - 2.7183\ y_3 = -0.0597$

. . . atd.

poslední rovnice (pro $i = 9$):

$-29.9641\ y_8 + (29.9641 - 1.4639 + 44.7012)\ y_9 - 44.7012\ y_{10} = -0.2420$

dosadíme okrajovou hodnotu $y_{10} = 0$:

$-29.9641\ y_8 + 73.2014\ y_9 = -0.2420$

Řešením soustavy je vektor
$Y = (1.3259,\ 0.8574,\ 0.5373,\ 0.3230,\ 0.1836,\ 0.0961,\ 0.0442,\ 0.0161,\ 0.0033)^T$.
Přibližná hodnota $y(0.2)$ je $y_1 = 1.3259$
(pro srovnání: přesná hodnota $y(0.2)$ je 1.3263).

Příklad 2

Je dána úloha
$$-(x^2y'(x))' + \frac{x^3}{2+x}y(x) = 4+x$$
s okrajovými podmínkami $y(-5) = -2,\ y(-3) = 2$.

a) Dokažte, že existuje právě jedno řešení úlohy.

b) Zvolte krok $h = 0.4$ a použitím metody sítí sestavte soustavu rovnic pro přibližné hodnoty řešení v uzlech sítě.

Řešení

$p(x) = x^2$

$q(x) = \dfrac{x^3}{2+x}$

$f(x) = 4+x$

a) Ověříme postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení úlohy:

- funkce x^2, $2x$, $\dfrac{x^3}{2+x}$, $4+x$ jsou spojité v intervalu $\langle -5, -3\rangle$,
- $x^2 > 0$, $\dfrac{x^3}{2+x} \geq 0$ na $\langle -5, -3\rangle$,

existuje tedy právě jedno řešení dané úlohy.

b) Nejdřív rozdělíme interval s krokem $h = 0.4$ a připravíme do tabulky potřebné koeficienty, ze kterých pak budeme sestavovat rovnice:

i	x_i	$p_{i\pm\frac{1}{2}}$	h^2q_i	h^2f_i
	-4.8	23.04		
1	-4.6		5.9899	-0.096
	-4.4	19.36		
2	-4.2		5.3882	-0.032
	-4.0	16.00		
3	-3.8		4.8775	0.032
	-3.6	12.96		
4	-3.4		4.4919	0.096
	-3.2	10.24		

Tabulka 2: **Příklad 2**. Koeficienty potřebné pro sestavení soustavy rovnic.

Výpočet koeficientů:

$p_{\frac{1}{2}} = p(-4.8) = (-4.8)^2 = 23.04$

$p_{1\frac{1}{2}} = p(-4.4) = (-4.4)^2 = 19.36$

$\dots$
$h^2 q_1 = 0.4^2 \cdot q(-4.6) = 0.16 \cdot \frac{(-4.6)^3}{2-4.6} = 5.9899$
$h^2 q_2 = 0.4^2 \cdot q(-4.2) = 0.16 \cdot \frac{(-4.2)^3}{2-4.2} = 5.3882$
$\dots$
$h^2 f_1 = 0.4^2 \cdot f(-4.6) = 0.16 \cdot (4 - 4.6) = -0.096$
$h^2 f_2 = 0.4^2 \cdot f(-4.2) = 0.16 \cdot (4 - 4.2) = -0.032$
$\dots$

Z připravených koeficientů sestavíme 4 rovnice pro 4 neznámé y_1 až y_4 :

první rovnice $(i = 1)$:

$-23.04\ y_0 + (23.04 + 5.9899 + 19.36)\ y_1 - 19.36\ y_2 = -0.096$

dosadíme okrajovou hodnotu $y_0 = -2$ a převedeme na pravou stranu:

$48.3899\ y_1 - 19.36\ y_2 = -0.096 + 23.04 \cdot (-2) = -46.176$

druhá rovnice $(i = 2)$:

$-19.36\ y_1 + (19.36 + 5.3882 + 16.00)\ y_2 - 16.00\ y_3 = -0.032$

$-19.36\ y_1 + 40.7482\ y_2 - 16.00\ y_3 = -0.032$

třetí rovnice $(i = 3)$:

$-16.00\ y_2 + (16.00 + 4.8775 + 12.96)\ y_3 - 12.96\ y_4 = 0.032$

$-16.00\ y_2 + 33.8375\ y_3 - 12.96\ y_4 = 0.032$

čtvrtá rovnice $(i = 4)$:

$-12.96\ y_3 + (12.96 + 4.4919 + 10.24)\ y_4 - 10.24\ y_5 = 0.096$

dosadíme okrajovou hodnotu $y_5 = 2$ a převedeme na pravou stranu:

$-12.96\ y_3 + 27.6919\ y_4 = 0.096 + 10.24 \cdot 2 = 20.576$

Výsledná soustava rovnic zapsaná maticově:

$$\begin{bmatrix} 48.3899 & -19.36 & 0 & 0 \\ -19.36 & 40.7482 & -16.00 & 0 \\ 0 & -16.00 & 33.8375 & -12.96 \\ 0 & 0 & -12.96 & 27.6919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46.176 \\ -0.032 \\ 0.032 \\ 20.576 \end{bmatrix}$$

Řešením soustavy je vektor $Y =$ (-1.1719, -0.5440, 0.0345, 0.7592)^T představující přibližné hodnoty řešení ve vnitřních uzlech sítě, tj. přibližné hodnoty $y(-4.6)$, $y(-4.2)$, $y(-3.8)$ a $y(-3.4)$.